Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2005/2006

Exercício-Teste 1 (a entregar na semana de 19/09/2005)

1. Calcule todas as primitivas das seguintes funções:

   a) $\frac{x}{1+x^4}$ b) $e^x \operatorname{sen} 2x$ c) $e^x \operatorname{sen}^2 x$.

2. Sem recorrer a primitivas, calcule os integrais seguintes:

   a) $\int_0^1 (1-x)\,dx$ b) $\int_{-1}^3 (4-2x)\,dx$.

3. Sabendo que $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = 1$ e $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \pi/4$, calcule:

   a) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ b) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx$ c) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2 x\,dx$.

Resolução:

1. a) Observando que $(x^2)' = 2x$, obtemos

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{d}{dx} arctg(x^2)\,dx = \frac{1}{2} arctg(x^2) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

b) Vamos utilizar primitivação por partes:

$$\int e^x \operatorname{sen} 2x\,dx = e^x \operatorname{sen} 2x - \int 2e^x \cos 2x\,dx.$$

De novo por partes,

$$\int e^x \cos 2x\,dx = e^x \cos 2x + \int 2e^x \operatorname{sen} 2x\,dx.$$

Destas duas igualdades concluímos que

$$\int e^x \operatorname{sen} 2x\,dx = \frac{1}{5}(e^x \operatorname{sen} 2x - 2e^x \cos 2x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

c) Primitivando por partes:

$$\int e^x \operatorname{sen}^2 x\,dx = e^x \operatorname{sen}^2 x - \int 2e^x \operatorname{sen} x \cos x\,dx.$$

Ora, $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$ e utilizando a alínea b) temos

$$\int e^x \operatorname{sen}^2 x\,dx = e^x \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{5}(e^x \operatorname{sen} 2x - 2e^x \cos 2x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

2. a) A região compreendida entre o gráfico da função $f(x) = 1 - x, x \in [0,1]$ e o eixo dos x é um triângulo de base 1 e altura 1. Logo,

$$\int_0^1 (1-x)\,dx = area = \frac{1}{2}.$$

b) A região compreendida entre o gráfico da função $f(x) = 4 - 2x, x \in [-1, 3]$ e o eixo dos x é constituída por dois triângulos. O primeiro, que corresponde à região onde $f > 0$, tem base $2 - (-1) = 3$ e altura dada por $f(-1) = 6$. A sua área, 9, contribui positivamente para o integral de f. O segundo triângulo corresponde à região onde $f < 0$ e tem base $3 - 2 = 1$ e altura $|f(3)| = 2$. Logo, a sua área é 1 e este valor contribui com um sinal negativo para o integral de f. Logo,

$$\int_{-1}^{3} (4 - 2x)\, dx = \int_{-1}^{2} (4 - 2x)\, dx + \int_{2}^{3} (4 - 2x)\, dx = 9 - 1 = 8.$$

3. a) Como $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen}(x + \pi)$ temos

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = -\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \operatorname{sen} x\, dx = 1.$$

Logo,

$$\int_{0}^{\frac{3}{2}\pi} \operatorname{sen} x\, dx = \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \operatorname{sen} x\, dx = 1 + 1 - 1 = 1.$$

b) De modo semelhante temos $\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2(x + \pi/2) = \operatorname{sen}^2(x + \pi)$. Logo,

$$\int_{0}^{\frac{3}{2}\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi.$$

c) Sabemos que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Por outro lado, $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} 1\, dx = \frac{3}{2}\pi$, pois é a área de um rectângulo de base $\frac{3}{2}\pi$ e altura 1. Logo,

$$\int_{0}^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2 x\, dx = \int_{0}^{\frac{3}{2}\pi} (1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx = \int_{0}^{\frac{3}{2}\pi} 1\, dx - \int_{0}^{\frac{3}{2}\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{3}{2}\pi - \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi.$$