Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2005/2006

Exercício-Teste 10 (a entregar na semana de 28/11/2005)

1. Determine o plano normal à linha
$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 \,;\, y = 0\},$$
no ponto $(2,0,4)$.

2. Determine o plano tangente à superfície
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2}\},$$
no ponto $(1,1,\sqrt{2})$.

3. Mostre que a função $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ tem máximo e mínimo no conjunto
$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1 \,;\, |y| \le 1\},$$
e determine os pontos correspondentes.

Resolução:

1. Note-se que L é o conjunto de pontos em $\mathbb{R}^3$ da forma $(x,0,x^2)$ em que $x \in \mathbb{R}$. Portanto, é a linha descrita pela função $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (t,0,t^2)$.

   É claro que a função γ é de classe C^1, $g'(t) = (1,0,2t)$ e que $(2,0,4) = g(2)$.

   Sabendo que o vector $g'(2) = (1,0,4)$ é tangente a L no ponto $(2,0,4)$, o correspondente plano normal será o conjunto dos pontos em $\mathbb{R}^3$ que verificam a condição
$$(1,0,4)\cdot(x-2,y,z-4) = 0,$$
   ou seja,
$$x - 2 + 4(z-4) = 0.$$

2. Consideremos a função definida por $f(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2}$. Note-se que f é de classe C^1 no seu domínio e
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\},$$
   ou seja, S é o conjunto de nível zero de f.

   Portanto, o vector
$$\nabla f(1,1,\sqrt{2}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,\sqrt{2}), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,\sqrt{2}), \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,\sqrt{2}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$$
   será perpendicular ao plano tangente a S no ponto $(1,1,\sqrt{2})$.

   Assim, o plano tangente a S no ponto $(1,1,\sqrt{2})$ será o conjunto de pontos que verificam a condição
$$(x-1, y-1, z-\sqrt{2})\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = 0,$$
   ou seja,
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) - \frac{\sqrt{2}}{2}(y-1) + z - \sqrt{2} = 0.$$

3. Sendo f contínua e Q um conjunto compacto, f tem máximo e mínimo em Q.

   Da definição de f, podemos concluir imediatamente que:

   a) $f(0,0) > f(x,y)\ \forall (x,y) \neq (0,0)$ e, portanto, a origem é o ponto de máximo absoluto de f.
   b) Os conjuntos de nível de f são circunferências centradas na origem e f decresce à medida que $\|(x,y)\|^2 = (x^2+y^2) \to \infty$, ou seja, à medida que o raio das circunferências aumenta.

   Portanto, os vértices do quadrado Q são os pontos de mínimo de f porque se encontram sobre a circunferência centrada na origem e de raio $\sqrt{2}$.

   Note que a origem é um ponto de estacionaridade de f pois $\nabla f(0,0) = (0,0)$.