

## Análise Matemática II

1º semestre de 2005/2006

### Exercício-Teste 11 (a entregar na semana de 5/12/2005)

1. Considere a função

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}.$$

Determine a série de Taylor de  $f$  na origem e a região em que a série converge.

2. Encontre e classifique os pontos de estacionaridade das seguintes funções:

- a)  $f(x, y) = -3(x^2 + y^2) + 2xy$ .  
b)  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z)(1 - z^2)$ .

### Resolução:

1. Reconhecemos que a função é a soma da série geométrica

$$\frac{1}{1 - x^2 - y^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (x^2 + y^2)^j,$$

para  $x^2 + y^2 < 1$ . Pela unicidade da representação de  $f$  por uma série de potências de  $x$  e  $y$ , obtemos que esta série é a série de Taylor da  $f$  na origem. Expandindo cada um dos termos da série geométrica, obtemos

$$\frac{1}{1 - x^2 - y^2} = 1 + (x^2 + y^2) + (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + \dots + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} x^{2j} y^{2n-2j} + \dots$$

2. a) Temos  $\nabla f(x, y) = (-6x + 2y, -6y + 2x)$ . Logo, a equação  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$  tem apenas a solução  $x = y = 0$  e o ponto  $(0, 0)$  é o único ponto crítico de  $f$ .  
A matriz Hessiana de  $f$  é

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios de  $H_f(0, 0)$  são dados por

$$\det(H_f(0, 0) - \lambda I) = (-6 - \lambda)^2 - 4 = 0,$$

ou seja  $\lambda = -8$  e  $\lambda = -4$ . Assim,  $H_f(0, 0)$  é definida negativa e  $(0, 0)$  é um máximo.

- b) Temos  $\nabla f(x, y, z) = (2x(1 - z^2), 2y(1 - z^2), -(1 - z^2) - 2z(x^2 + y^2 - z))$ . Logo, os pontos críticos são dados por

$$\{x = 0 \vee z \pm 1\} \wedge \{y = 0 \vee z = \pm 1\} \wedge \{(1 - z^2) + 2z(x^2 + y^2 - z) = 0\}.$$

Assim temos  $x = y = 0$  e  $z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ , ou seja os pontos críticos  $a = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}})$  e  $b = (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ . Temos também as soluções com  $z = +1$  e  $x^2 + y^2 = 1$ , que representam uma circunferência de raio 1 no plano  $z = 1$  constituída por pontos críticos. (Verifica-se facilmente que para  $z = -1$  não existem valores de  $x$  e  $y$  que resolvam a terceira equação.)

A matriz Hessiana ed  $f$  é dada por,

$$H_f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2(1 - z^2) & 0 & -4xz \\ 0 & 2(1 - z^2) & -4yz \\ -4xz & -4yz & 4z - 2(x^2 + y^2 - z) \end{bmatrix}.$$

Então,

$$H_f(0, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \pm \frac{4}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Assim, os valores próprios de  $H_f(a)$  são todos positivos e  $a$  é um mínimo, ao passo que  $H_f(b)$  tem dois valores próprios positivos e um negativo sendo indefinida e sendo o ponto  $b$  um ponto em sela.

Seja agora  $p = (x, y, z)$  com  $x^2 + y^2 = 1$  e  $z = 1$ . Temos,

$$H_f(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4x \\ 0 & 0 & -4y \\ -4x & -4y & 4 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios são solução de

$$-\lambda(-\lambda(4 - \lambda) - 16y^2) + 16x^2\lambda = 0.$$

Como  $x^2 + y^2 = 1$ , obtemos, resolvendo  $\lambda(16 + \lambda(4 - \lambda)) = 0$ , os valores próprios  $0, 2 + 2\sqrt{5}, 2 - 2\sqrt{5}$ . Logo,  $H_f(p)$  é indefinida e qualquer destes pontos  $p$  é um ponto em sela.