Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2005/2006

Exercício-Teste 2 (a entregar na semana de 26/09/2005)

1. Determine a primitiva da função $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ que se anula em $x = 0$.
2. Determine a função que verifica as condições seguintes:

$$f''(x) = (\cos x - 1)\operatorname{sen} x \ ; \quad f(0) = 2 \ ; \ f'(0) = 0.$$

Resolução:

1. Notando que

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1},$$

uma primitiva da função f é dada por

$$F(x) = \arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + K,$$

em que K é uma constante.

Dado que $F(0) = 0$, então $K = 0$ e, portanto,

$$F(x) = \arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

2. Sendo $f''(x) = (\cos x - 1)\operatorname{sen} x$, por primitivação obtemos

$$f'(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + \cos x + A,$$

em que A é uma constante.

Usando a identidade

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

e primitivando novamente, obtemos

$$f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x + Ax + B,$$

em que B é também uma constante.

Sendo $f'(0) = 0$, então $A = -1$.

Dado que $f(0) = 2$, obtemos $B = 2$.

Portanto,

$$f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x - x + 2.$$