

## Análise Matemática II

1º semestre de 2005/2006

### Exercício-Teste 4 (a entregar na semana de 10/10/2005)

1. Calcule o comprimento da linha representada pelo gráfico da função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 1 + x^2$ .
2. Calcule o volume do sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 + z^2\}$$

### Resolução:

1. Seja  $L$  o comprimento da linha. Então,

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx,$$

ou seja

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx.$$

Efectuando a substituição  $x = \frac{1}{2} \sinh(t)$  e, tendo em conta que  $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ , teremos

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \cosh^2(t) dt \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} (e^t + e^{-t})^2 dt \\ &= \frac{1}{16} \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} 2e^{2t} dt - \frac{1}{16} \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} (-2)e^{-2t} dt + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}) \\ &= \frac{1}{16} (2 + \sqrt{5})^2 - \frac{1}{16(2 + \sqrt{5})^2} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

2. Por definição,  $S$  pode ser visto como o conjunto de círculos de raio  $\sqrt{1 + z^2}$ , em que  $0 \leq z \leq 1$ . Portanto, o volume de  $S$ , designado por  $\text{vol}(S)$ , será dado por

$$\begin{aligned} \text{vol}(S) &= \int_0^1 \pi (1 + z^2) dz \\ &= \pi \left(1 + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$