Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2005/2006

Exercício-Teste 6 (a entregar na semana de 23/10/2005)

1. Estude a continuidade da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. Calcule ou mostre que não existem os limites seguintes:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^4+y^2}$.

Resolução:

1. Usando o critério das sucessões é claro que a função f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Resta analisar a continuidade de f na origem. Para isso, consideremos o eixo das abcissas, ou seja, o conjunto de pontos $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Neste conjunto temos

$$f(x,0) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|},$$

ou seja,

$$f(x,0) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

e, sendo $f(0,0) = 0$, concluímos que a função f não é contínua na origem.

2. a) Note-se que

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^2 x}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\right| = \sqrt{x^2+y^2},$$

e, portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0.$$

b) Seja $g(x,y) = \dfrac{x^3}{x^4+y^2}$. Assim, por um lado temos

$$g(0,y) = \frac{0}{y^2} = 0, \quad \forall y \neq 0,$$

e, por outro

$$g(x,0) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0.$$

Então não existe o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^4+y^2}$.