

Análise Matemática II

1º semestre de 2005/2006

Exercício-Teste 7 (a entregar na semana de 31/10/2005)

Exercícios de revisão:

1. Calcule o volume do sólido

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq z \leq e, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \log z\}.$$

2. a) Escreva a série de Taylor em $x = 0$ para $\frac{1}{1+x^2}$ e determine o seu raio de convergência.
b) Seja $f(x) = \arctan x$. Utilize a alínea a) para determinar $f^{(5)}(0)$.
3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \cos\left(\frac{3x^5 - 4y^4}{2x^2 + 8y^2}\right)$. Será possível estender f a todo o \mathbb{R}^2 como função contínua? Em caso afirmativo, determine o valor apropriado de $f(0, 0)$.

Resolução:

1. Seja $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ a distância do ponto (x, y, z) ao eixo dos z . Para cada z fixo, com $1 \leq z \leq e$ temos $0 \leq \rho \leq z \log z$. S será então obtido por revolução da região $\{(\rho, z) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq z \leq e, \rho \leq z \log z\}$ em torno do eixo dos z . A intersecção do plano horizontal, para cada z fixo, com S , será então um disco de raio $\rho = z \log z$. Logo,

$$Vol(S) = \int_1^e \pi z^2 \log^2 z \, dz = \pi \frac{z^3}{3} \log^2 z \Big|_1^e - \int_1^e \pi \frac{2z^2}{3} \log z \, dz = \pi \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\pi \int_1^e z^2 \log z \, dz.$$

Integrando por partes mais uma vez,

$$Vol(S) = \pi \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\pi \frac{z^3}{3} \log z \Big|_1^e + \frac{2}{9}\pi \int_1^e z^2 \, dz = \pi \frac{e^3}{3} - \frac{2}{9}\pi e^3 + \frac{2}{27}\pi(e^3 - 1).$$

2. a) Através da série geométrica, temos de imediato

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n,$$

onde a série converge para $|-x^2| < 1$, ou seja $|x| < 1$. Logo, o raio de convergência é 1.

- b) Se $f(x) = \arctan x$, temos $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Primitivando a série da alínea anterior termo a termo, para $|x| < 1$, temos

$$\arctan(x) = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

onde c é uma constante. Como $\arctan(0) = 0$ temos $c = 0$ e $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. Logo, $f^{(5)}(0)$ será dado pelo coeficiente de $\frac{x^5}{5!}$. Logo, $f^{(5)}(0) = \frac{5!}{5} = 4! = 24$.

3. Utilizando coordenadas polares, $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, temos

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \cos \left(\frac{3r^5 \cos^5 \theta - 4r^4 \sin^4 \theta}{2r^2 \cos^2 \theta + 8r^2 \sin^2 \theta} \right) =$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \cos \left(\frac{3r^3 \cos^5 \theta - 4r^2 \sin^4 \theta}{2 \cos^2 \theta + 8 \sin^2 \theta} \right) = \cos 0 = 1,$$

pois

$$\left| \frac{1}{2 \cos^2 \theta + 8 \sin^2 \theta} \right| = \left| \frac{1}{2 + 6 \sin^2 \theta} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Logo, definindo $f(0, 0) = 1$ temos f contínua em \mathbb{R}^2 .