

Análise Matemática II

1º semestre de 2005/2006

Exercício-Teste 9 (a entregar na semana de 21/11/2005)

Considere as funções:

$$f(x, y, z) = (z, -x^2, -y^2) \text{ e } g(x, y, z) = x + y + z.$$

Sejam $v = (1, 2, 3)$ e $u = (2, 3, \frac{1}{2})$.

1. Calcule as matrizes Jacobianas de f , g e $g \circ f$.
2. Calcule as seguintes derivadas direccionais:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 1, 1), \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0, 1), \frac{\partial g}{\partial v}(0, 1, 0), \frac{\partial(g \circ f)}{\partial u}(2, 0, 1).$$

3. Determine a direcção de crescimento máximo de $g \circ f$ no ponto $(1, 0, 1)$.
4. Determine a recta normal ao parabolóide

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - x^2 - y^2 = 3\},$$

no ponto $(1, 1, 5)$.

Resolução:

1. Temos,

$$Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2x & 0 & 0 \\ 0 & -2y & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$Dg(x, y, z) = [1 \quad 1 \quad 1].$$

Temos também, $g \circ f(x, y, z) = g(f(x, y, z)) = z - x^2 - y^2$, pelo que

$$D(g \circ f)(x, y, z) = [-2x \quad -2y \quad 1].$$

Note-se que as derivadas parciais de $f, g, g \circ f$ são contínuas pelo que estas funções são diferenciáveis.

2. Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 1, 1) = Df(1, 1, 1) \cdot v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0, 1) = Df(0, 0, 1) \cdot u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(0, 1, 0) = Dg(0, 1, 0) \cdot v = [1 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 6.$$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial u}(2, 0, 1) = D(g \circ f)(2, 0, 1) \cdot u = [-4 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{15}{2}.$$

3. A direcção de crescimento máximo é dada por $\nabla(g \circ f)(1, 0, 1) = (-2, 0, 1)$, ou, normalizando, por $(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$.
4. P é o conjunto de nível do campo escalar $g \circ f$ dado por $g \circ f(x, y, z) = 3$. Logo, o vector $\nabla(g \circ f)(1, 1, 5) = (-2, -2, 1)$ é normal a P em $(1, 1, 5)$. A recta normal a P em $(1, 1, 5)$ é então dada por

$$L = \{(1, 1, 5) + t(-2, -2, 1), t \in \mathbb{R}\}.$$