Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS EXCEPTO LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE 1 – 9 DE NOVEMBRO DE 2002

apresente e justifique todos os cálculos

duração: hora e meia (9:00-10:30)

(1) Considere a seguinte região de $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\ ,\ \sin y \leq z \leq 1\}\ .$$

(3 val.) (a) Calcule o integral $\iiint_V 2z$.

(3 val.) (b) Escreva uma expressão para $\iiint_V f$ da forma

$$\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} f(x,y,z)\, dx \right) dy \right) dz\ .$$

(3 val.) (2) Um sólido com a forma da região

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + z^2 \leq y \leq 1\}$$

tem densidade de massa $f(x,y,z) = e^y$. Calcule a massa total do sólido.

(3) Considere os campos vectoriais seguintes:

$$F(x,y,z) = \left(2xze^{x^2+y}, ze^{x^2+y}, e^{x^2+y}\right) \quad \text{e} \quad G(x,y,z) = \frac{1}{x^2+z^2}(-z,0,x)\ .$$

(3 val.) (a) Calcule o trabalho de F ao longo do arco da hipérbole definida por $z = 1$ e $x^2 - y^2 = 1$, desde o ponto $(1,0,1)$ até ao ponto $(\sqrt{2},1,1)$.

(3 val.) (b) Calcule o trabalho de G ao longo da circunferência definida por $x^2 + z^2 = 1$ e $y = 0$, percorrida no sentido anti-horário para um observador colocado no ponto $(0,-10,0)$, e diga se G é ou não um gradiente no seu domínio.

(2 val.) (c) Calcule o trabalho de G ao longo da elipse definida por $x^2/10 + z^2/55 = 1$ e $y = 0$, percorrida no sentido anti-horário quando se observa de $(0,-10,0)$.

(3 val.) (4) Seja $A \subset [0,1]$ um conjunto da forma $A = \cup_{i=1}^{+\infty}]a_i, b_i[$ com $\sum_{i=1}^{+\infty}(b_i - a_i) < 1$ e tal que todos os racionais de $]0,1[$ pertencem a A. Mostre que a fronteira de A não tem medida nula.