Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º Semestre 1999/2000

2º Exame - Todos os cursos

12 de Julho de 2000

Duração - 3 horas.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere a região $A \subset \mathbb{R}^2$ descrita por (2)

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y^2 \,;\; x < y < \frac{1}{2}\}.$$

Escreva uma expressão para a área de A em termos de um integral múltiplo da forma $\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots} dy)dx$.

2. Considere o sólido V descrito por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1+z^2 \,;\, x^2+y^2+z^2 < 5 \,;\, z > 0\}.$$

   a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de um integral múltiplo da forma $\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots} dy)dx)dz$. (2)

   b) Calcule o volume de V. (2)

3. Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ a região definida por (2)

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2 \,;\, x > 0 \,;\, x < y < 3x\}.$$

Calcule o integral

$$\int\int_S \frac{y}{x(1+x^2y^2)} dxdy$$

usando uma mudança de coordenadas apropriada.

4. a) Mostre que, numa vizinhança do ponto $(1,0,1)$, a superfície definida pela equação $xy + z + 3xz^5 = 4$ pode ser representada pelo gráfico de uma função $z = f(x,y)$. (1)

   b) Calcule a derivada $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$. (1)

Volte S. F. F. $\longrightarrow$

5. Considere a variedade

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2 \, ; \, |z| < 1\}.$$

a) Determine o espaço normal a M no ponto $(0, \sqrt{2}, 0)$. (2)

b) Calcule a área de M. (2)

c) Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = (x, -y, z^2 - 1)$. Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através de M no sentido da normal que tem terceira componente negativa. (2.5)

6. Seja $\alpha > 0$. Considere a superfície S definida por (2.5)

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \alpha(x^2 + y^2) \, ; \, z < 1\}$$

e o campo vectorial

$$F(x,y,z) = (-yz, xz, e^{xy})$$

Determine α tal que o fluxo de $rotF$ através de S, segundo a normal com terceira componente positiva, é igual a 4π.

7. Prove que a função (1)

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}(1 + x^2 + y^2)}$$

é integrável em $\mathbb{R}^2$ e calcule o respectivo integral.