Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

1º Teste - 13 de Novembro de 99 - 13h00

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2 \leq x+y \leq 4\,, 2 \leq x-y \leq 4\}$$

e seja $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 - y^2$.

(3) a) Escreva uma expressão para $\int_S f$ em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int dy \right) dx$.

(3) b) Calcule o integral $\int_S f$ usando a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = \sqrt{u+1} + \sqrt{v+1} \\ y = \sqrt{u+1} - \sqrt{v+1} \end{cases}$$

definida no conjunto $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > -1\,, v > -1\}$.

2. Considere o conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} - 1 \leq z \leq 1 - \sqrt[4]{x^2+y^2}\}$$

(3) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de um integral iterado da forma

$$\int \left(\int \left(\int dy \right) dx \right) dz$$

(3) b) Calcule o volume de V da forma que preferir.

3. Considere o campo vectorial $F(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ definido em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

(2) a) Mostre que o campo é fechado.

(3) b) Calcule o integral de linha de F ao longo de um caminho fechado simples que percorre a circunferência de raio 1 centrada na origem uma vez no sentido directo.

(3) 4. Seja $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função tal que $f^2 :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função limite superior em $]0,1[$. Mostre que f é uma função limite superior em $]0,1[$.