Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º Teste e 1º Exame - 20 de Janeiro 2000 - 13 horas

2º Teste: Grupos 4, 5 e 6 - 1º Exame: Todos os grupos

Duração: Teste 90 minutos - Exame 3 horas

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ o sólido definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\,;\, y > 0\,;\, 1 < x^2 + y^2 < 4\,;\, 0 < z < 5 - x^2 - y^2\}$$

(2) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(2) b) Calcule as coordenadas do centróide de V.

2. Considere o conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y < x < 3 - y,\, e^x + 1 < y < e^x + 2\}$$

(3) Calcule o integral

$$\int\int_S \frac{e^x + 1}{\sqrt{y - e^x}} dxdy$$

3. Seja $\alpha : [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o caminho dado pela expressão

$$\alpha(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\mathrm{sen} t)$$

e seja $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o campo vectorial definido por

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{y}{1 + x^2 + y^2}\right)$$

(1.5) a) Calcule o comprimento do caminho α.

(1.5) b) Calcule o trabalho realizado pela força F ao longo do caminho α.

4. Seja $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 2,\ -1 < z < 0\}$.

(2) a) Calcule o momento de inércia de S em relação ao eixo Oz se a densidade de massa for dada por $f(x,y,z) = -z$.

(1) b) Calcule o espaço tangente a S no ponto $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{2}\right)$.

5. Seja

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -1 + y^2 + z^2,\ x \leq 0\}$$

e considere os campos vectoriais

$$F(x,y,z) = (1 + x^2 + xy^3, xy, -3xz)$$

$$G(x,y,z) = (xz, ze^x, -y)$$

(2.5) a) Calcule o fluxo de F através de S no sentido da normal cuja componente segundo x é positiva.

(2) b) Calcule o fluxo de $\mathrm{rot} G$ através de S no sentido da normal cuja componente segundo x é negativa.

(1.5) 6. a) Determine se a função $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1$$

é ou não integrável.

(1) b) Calcule

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}}}{(x^2+y^2)^{5/4}}\, dxdy$$