Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º Exame - 3 de Fevereiro de 2000 - 13h
Duração: 3h

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a região plana

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, e^x \leq y \leq e^{2x}\}.$$

(3) Escreva uma expressão para a área de S em termos de integrais iterados em ambas as ordens de integração

$$\int\int dxdy \qquad \text{e} \qquad \int\int dydx$$

2. Considere o conjunto

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - 3\right)^2 \leq 1;\ x > 0;\ y > 0\}$$

(2) a) Escreva uma expressão para o volume de T em coordenadas cilíndricas.

(2) b) Calcule

$$\int_T \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{x^2+y^2} - 3\right)^2}}$$

3. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1\}$$

e a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x + y + z$

(2) a) Ache o máximo e o mínimo de f em S.

(1) b) Determine o espaço tangente a S no ponto $(1,1,\frac{3}{\sqrt{2}})$.

4. Seja $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ o campo vectorial definido pela expressão $F(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$

(1,5) a) Determine se F é um gradiante.

(1) b) Calcule o integral de linha de F segundo um caminho fechado e simples que percorre a elipse

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$$

no sentido directo.

5. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1;\ y > 0\}$$

Seja n a normal a S, unitária, com a componente segundo o eixo dos y positiva e $F : S \to \mathbb{R}^3$ o campo vectorial definido por $F(x,y,z) = (-z, -z, x+y)$.

(1) a) Determine uma função $\alpha(x,y,z)$ que verifica a equação

$$\operatorname{rot}(-yx, \alpha(x,y,z), xz - yz) = F(x,y,z)$$

(2) b) Calcule o fluxo de F através de S segundo a normal n usando o teorema de Stokes.

(2,5) c) Calcule o fluxo de F através de S segundo a normal n usando o teorema da divergência.

(1) 6. a) Calcule o integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Justifique cuidadosamente a resposta.

(1) b) Considere as funções $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$,

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}\cos x & \text{se } 2n\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$$

Determine se g é integrável em $[0, +\infty[$.