Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III
2001/2002 - Época Especial
9 de Setembro de 2002 – 9 horas

Duração: 3h

(2 val.) **1.** Considere o integral

$$\int_{-1}^{0}\left(\int_{x^3}^{0} dy\right)dx + \int_{0}^{1}\left(\int_{x^3}^{1} dy\right)dx.$$

Invertendo a ordem de integração, escreva a expressão para o mesmo integral na forma $\int(\int dx)dy$.

2. Considere a região $V \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x^2+y^2 \geq 1/4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(2 val.) (b) Calcule o volume de V.

3. Considere o campo vectorial fechado em $\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = (2e^x, 4e^y).$$

(1.5 val.) (a) Calcule o trabalho de f ao longo do caminho $\gamma(t) = (t\,\mathrm{sen}t, t\cos t)$, $t \in [0, \pi/2]$, que une os pontos $(0,0)$ e $(\pi/2, 0)$.

(1 val.) (b) Calcule o trabalho de f ao longo da elipse de equação $x^2/2 + y^2/4 = 1$, percorrida uma vez no sentido anti-horário.

(1.5 val.) (c) Considere o campo vectorial

$$g(x,y) = (2e^x - \frac{y}{x^2+y^2}, 4e^y + \frac{x}{x^2+y^2}).$$

Calcule o trabalho de g ao longo da circunferência $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$, percorrida uma vez no sentido anti-horário.

Volte S. F. F.

(2 val.) **4.** (a) Considere as curvas

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{e} \quad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/4 + y^2/9 = 1\}.$$

Determine o espaço normal em cada ponto destas curvas.

(2 val.) (b) Determine o valor máximo e mínimo da função $f(x, y) = x + y$ na região

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, x^2/4 + y^2/9 \leq 1\}.$$

5. Considere o campo vectorial $f(x, y, z) = (xe^z, -ye^z, 1)$ definido em $\mathbb{R}^3$ e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4, z > 0\}.$$

(2 val.) (a) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de f através de S no sentido da normal que no ponto $(x, y, z) = (0, 0, 3)$ é dada pelo vector $(0, 0, 1)$.

(2 val.) (b) Calcule o mesmo fluxo através do teorema da divergência.

(2 val.) **6.** Calcule o integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}.$$

Justifique cuidadosamente.