Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

Resolução do 1º Teste - 28 de Abril de 2001

1. Temos
$$A = \int_2^3 \left(\int_{8-x^2}^{x^2} dy \right) dx = \int_2^3 (2x^2 - 8) dx = 14/3.$$

2. a) O conjunto tem simetria cilíndrica em relação ao eixo dos z. Seja $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, como é habitual nas coordenadas cilíndricas. Fazendo um corte vertical, por exemplo segundo o plano $x = 0$, observamos que o sólido é obtido por rotação em torno do eixo dos z, para $x, y \geq 0$, da região que está simultâneamente abaixo da recta $z = 1 + \rho$ e acima da parábola $z = 2\rho^2$ que se intersectam para $\rho = 1$.
Temos assim,
$$Vol(V) = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{z/2}} \left(\int_0^{\sqrt{(z/2)-y^2}} dx \right) dy \right) dz +$$
$$+ \int_1^2 \left(\int_0^{z-1} \left(\int_{\sqrt{(z-1)^2-y^2}}^{\sqrt{(z/2)-y^2}} dx \right) dy \right) dz + \int_1^2 \left(\int_{z-1}^{\sqrt{z/2}} \left(\int_0^{\sqrt{(z/2)-y^2}} dx \right) dy \right) dz.$$

   b) Utilizando coordenadas cilíndricas obtemos, pela alínea anterior,
$$Vol(V) = \int_0^1 \left(\int_{2\rho^2}^{1+\rho} \left(\int_0^{\pi/2} \rho \, d\theta \right) dz \right) d\rho = \pi/6.$$

3. a) Consideremos a mudança de coordenadas dada por $(x, y) = g(u, v)$. A transformação g é de classe C^1 e é injectiva pois $(u, v) = g^{-1}(x, y) = (2x, y + 4x^2)$. Temos também $|\det Dg| = 1/2 \neq 0$. Além disso, as condições que determinam S escritas em termos de u e v dão precisamente a região U.

   b) Pelo teorema da mudança de coordenadas de integração temos então,
$$\int_S x e^{(y+4x)^2} dxdy = \int_U (u/2) e^{v^2} (1/2) dudv =$$
$$= (1/4) \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{v}} u e^{v^2} du \right) dv = (1/8) \int_0^4 v e^{v^2} dv = (1/16)(e^{16} - 1).$$

4. a) Temos

$$W=\int_0^1 f(g(t))\cdot g'(t)dt=\int_0^1 (at^{2b+3c},2t^{1+b+3c},3t^{1+2b+2c})\cdot(1,bt^{b-1},ct^{c-1})dt=$$

$$=\int_0^1 (a+2b+3c)t^{2b+3c}dt=\frac{a+2b+3c}{1+2b+3c}.$$

b) Pela alínea a) vemos que com $a=1$ temos sempre $W=1$.

c) Temos com $b=c=3/2$ que $g(t)=(t,t^{3/2},t^{3/2})$. Logo $g'(t)=(1,(3/2)\sqrt{t},(3/2)\sqrt{t})$ e $||g'(t)||=\sqrt{1+(9/2)t}$. Então o comprimento será

$$L_g=\int_0^1 \sqrt{1+(9/2)t}dt=4/27((1+(9/2))^{3/2}-1).$$

5. A função $g(x)=1/\sqrt{x}$ é integrável em $]0,3[$. Na verdade, esta função é uma função limite superior neste intervalo como facilmente se verifica (ver exercícios resolvidos na web). Por outro lado a função $h(x)=1/\sqrt{3-x}$ também é integrável em $]0,3[$. De facto, $h(x)$ é simplesmente $g(x)$ mas após uma translação e reflexão $x\to 3-x$. Facilmente se verifica que $h(x)$ também é função limite superior no intervalo $]0,3[$. Mas então $f(x)=g(x)-2h(x)$ é uma combinação linear de funções limite superior pelo que é integrável em $]0,3[$. Note-se no entnto que f <u>não</u> é uma função limite superior já que é ilimitada inferiormente.