Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III - 2S - 99/00
2º Teste / 1º Exame - 26.06.2000
Resolução

1. Dado que, para $|x| \leq 1$, temos $|x^3| \leq |x|$, então

$$\begin{aligned} vol_2(A) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{|x^3|}^{|x|} dy \right) dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(\int_{-x^3}^{-x} dy \right) dx + \int_{0}^{1} \left(\int_{x^3}^{x} dy \right) dx \end{aligned}$$

2. a) O sólido V é limitado pela esfera de equação $x^2+y^2+z^2=4$ e pelo cone de equação $z=\sqrt{x^2+y^2}$, ou seja, temos

$$V = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\}$$

A esfera e o cone intersectam-se segundo a linha dada pelas equações

$$z = \sqrt{2}\ ;\ x^2+y^2 = 2$$

e, portanto, na direcção z o sólido V apresenta duas regiões distintas:

i) Fixando z no intervalo $[0,\sqrt{2}]$, obtemos o quarto de círculo em xy, de raio z e definido por

$$\{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \leq z\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\}$$

ii) Fixando z no intervalo $[\sqrt{2},2]$, obtemos o quarto de círculo em xy, de raio $\sqrt{4-z^2}$ e definido por

$$\{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{4-z^2}\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} vol_3(V) &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^z \left(\int_0^{\sqrt{z^2-y^2}} dx \right) dy \right) dz + \\ &+ \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(\int_0^{\sqrt{4-z^2}} \left(\int_0^{\sqrt{4-z^2-y^2}} dx \right) dy \right) dz \end{aligned}$$

b) Em coordenadas cilíndricas (ρ,θ,z), V é dado por

$$\rho \leq z \leq \sqrt{4-\rho^2}\ ;\ \rho\cos\theta \geq 0\ ;\ \rho \operatorname{sen}\theta \geq 0$$

e, tendo em conta que a esfera e o cone se intersectam para $z=\sqrt{2}\ ;\ \rho^2=2$, temos

$$\rho \leq z \leq \sqrt{4-\rho^2}\ ;\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\ ;\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$$

Assim, o volume de V é dado por

$$vol_3(V) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_\rho^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho\, dz \right) d\rho \right) d\theta$$

c) Em coordenadas esféricas (r,θ,ϕ), temos

$$r \leq 2 \ ; \ r\cos\phi \geq r \operatorname{sen}\phi \ ; \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

ou seja

$$r \leq 2 \ ; \ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \ ; \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

e, portanto

$$\begin{aligned} vol_3(V) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^2 r^2 \operatorname{sen}\phi \, dr \right) d\phi \right) d\theta \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \\ &= \frac{2\pi}{3}(2-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

3. Consideremos a transformação linear $(u,v) = g(x,y)$ definida por

$$\begin{aligned} u &= x+y \\ v &= x-2y \end{aligned}$$

Sendo linear, para que g seja uma transformação de coordendas basta que a matriz que a representa seja não singular. (Recorde-se que para uma transformação linear a matriz que a representa e a sua derivada coincidem). Assim, g é uma transformação de coordenadas porque

$$\det Dg(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -3 \neq 0$$

Seja $T = g(S)$, ou seja, a imagem de S através da transformação g. Da definição de S, obtemos

$$T = \{(u,v) : 0 \leq u \leq \pi \ ; \ 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Assim, temos,

$$\begin{aligned} \int\int_S \operatorname{sen}(x+y)\cos(x-2y)dxdy &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(u)\cos(v)dv \right) du \\ &= \frac{1}{3}\left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(u)du \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(v)dv \right) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

4. a) Devido à simetria cilíndrica, M pode ser parametrizada pela seguinte função

$$g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, \rho^3) \ ; \ 0 < \rho < 2 \ ; \ 0 < \theta < 2\pi$$

donde se conclui que

$$g(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = (1, 1, \sqrt{8})$$

O espaço tangente no ponto $(1,1,\sqrt{8})$ é gerado pelas colunas da matriz derivada $Dg(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$. Assim, dado que

$$Dg(\rho,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta\\ 3\rho^2 & 0\end{bmatrix}$$

temos

$$Dg(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -1\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\ 6 & 0\end{bmatrix}$$

Portanto, o espaço tangente a M no ponto $(1,1,\sqrt{8})$ é gerado pelos vectores

$$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},6)\ ;\ (-1,1,0)$$

ou, eqivalentemente, pelos vectores

$$(1,1,6\sqrt{2})\ ;\ (-1,1,0)$$

b) Usando a parametrização da alínea anterior, a área de M é dada por

$$vol_2(M)=\int\int_T\sqrt{\det Dg^tDg}\,d\rho d\theta$$

em que $T=]0,2\pi[\times]0,2[$ e Dg^t designa a transposta da matriz Dg.
Da alínea anterior, obtemos

$$Dg^tDg=\begin{bmatrix}1+9\rho^4 & 0\\ 0 & \rho^2\end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$vol_2(M)=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2\rho\sqrt{1+9\rho^4}d\rho\right)d\theta$$

c) Sendo M dada por uma parametrização, trata-se de uma superfície orientável e, assim, podemos usar o teorema de Stokes para calcular o fluxo de $rot f$ através de M segundo a normal com terceira componente negativa.
Da definição de M, a respectiva fronteira ou bordo é a circunferência definida por

$$\partial M=\{(x,y,z): x^2+y^2=4\ ;\ z=8\}$$

Assim, temos

$$\int\int_M rot f\cdot\nu=\int_{\partial M}f\cdot d\gamma$$

em que γ é o caminho que descreve ∂M no sentido negativo para que seja compatível com a orientação de M induzida pela normal ν que tem terceira componente negativa.
Portanto,

$$\gamma(t)=(2\cos t,-2\,\mathrm{sen}\,t,8)\ ;\ 0\le t\le 2\pi$$

e temos

$$\begin{aligned}\int\int_M rot f\cdot\nu &= \int_{\partial M}f\cdot d\gamma\\ &= \int_0^{2\pi}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt\\ &= \int_0^{2\pi}(16\,\mathrm{sen}\,t,\ 16\cos t,\ -64\cos^3 t\ \mathrm{sen}^3 t)\cdot(-2\,\mathrm{sen}\,t,\ -2\cos t,\ 0)dt\\ &= -64\pi\end{aligned}$$

d) Da alínea anterior, o integral de linha de f ao longo de ∂M não é nulo. Sendo ∂M uma linha fechada, concluimos que o campo f não é um gradiente.

5. Vamos aplicar o teorema da divergência ao campo h e à pirâmide P

$$\int\int\int_P divh = \int\int_{\partial P} h \cdot \nu$$

em que ν designa a normal unitária e exterior a P.

A pirâmide P é limitada pelas seguintes superfícies planas

$$\begin{array}{rcl} S & = & \{(x,y,z) : x+y+z=1 \; ; \; 0<x<1 \; ; \; x+y<1\} \\ P_z & = & \{(x,y,z) : z=0 \; ; \; 0<x<1 \; ; \; x+y<1\} \\ P_x & = & \{(x,y,z) : x=0 \; ; \; 0<y<1 \; ; \; y+z<1\} \\ P_y & = & \{(x,y,z) : y=0 \; ; \; 0<x<1 \; ; \; x+z<1\} \end{array}$$

e pretende-se calcular o fluxo de h através de S segundo a normal exterior a P.

Dado que

$$divh = 0$$

obtemos

$$\int\int_S h \cdot \nu = -\int\int_{P_z} h \cdot \nu_z - \int\int_{P_x} h \cdot \nu_x - \int\int_{P_y} h \cdot \nu_y$$

em que ν_z, ν_x, ν_y designam, respectivamente, as normais unitárias e exteriores aos planos P_z, P_x, P_y, ou seja

$$\begin{array}{rcl} \nu_z & = & (0,0,-1) \\ \nu_x & = & (-1,0,0) \\ \nu_y & = & (0,-1,0) \end{array}$$

Portanto,

$$\begin{array}{rcl} h \cdot \nu_z & = & 0 \\ h \cdot \nu_y & = & 0 \\ h \cdot \nu_x & = & 3 \end{array}$$

ou seja,

$$\int\int_S h \cdot \nu = 3vol_2(S) = \frac{3}{2}$$

6. Vamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange. Sendo a circunferência dada pela equação $x^2+y^2=1$, consideremos os pontos estacionários da função

$$g(x,y) = x - y + \lambda(x^2+y^2-1)$$

sobre a circunferência dados pelo sistema

$$\begin{array}{rcl} 1+2\lambda x & = & 0 \\ -1+2\lambda y & = & 0 \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array}$$

Da primeira e da segunda equações, obtemos

$$y = -x$$

e, da terceira obtemos os pontos estacionários

$$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \ ; \ (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

Sendo

$$\begin{aligned} f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) &= -\sqrt{2} \\ f(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

concluimos que o ponto de máximo é dado por

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

7. Dado que f é uma função contínua no intervalo $I =]0, \infty[$, é integrável em qualquer intervalo compacto $[a, b] \subset]0, \infty[$. Assim, consideremos a sucessão de funções (f_k), $k = 1, 2, \ldots$ definidas por

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } \frac{1}{k} \leq x \leq k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então,

i) A sucessão (f_k) é crescente porque $f > 0$.

ii) $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ qtp.

iii) A sucessão de integrais $(\int_I f_k)$ é convergente. De facto, temos

$$\int_I f_k = \int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = 2(e^{-\frac{1}{k}} - e^{-k}) \to 2$$

Pelo teorema da convergência monótona, concluimos que f é integrável em I e

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = \lim_{k\to\infty} \int_I f_k = 2$$