Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III - 2S - 99/00
2º Exame - 12.07.2000
Resolução

1. Da definição de A concluimos imediatamente que $0 < x < \frac{1}{2}$. Por outro lado, a parábola dada por $x = y^2$ e a recta dada por $y = \frac{1}{2}$ intersectam-se no ponto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Portanto, o conjunto A é constituído por duas regiões:

   i) Fixando $0 < x < \frac{1}{4}$, então $x < y < \sqrt{x}$.

   ii) Fixando $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$, obtemos $x < y < \frac{1}{2}$

   Assim, a área de A é dada por

$$vol_2(A) = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\int_x^{\sqrt{x}} dy \right) dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^{\frac{1}{2}} dy \right) dx$$

2. a) Das inequações $x^2 + y^2 + z^2 < 5$ e $z > 0$, obtemos $0 < z < \sqrt{5}$. Por outro lado, as superfícies dadas, respectivamente, por $x^2+y^2 = 1+z^2$ e $x^2+y^2+z^2 = 5$ intersectam-se segundo a linha dada pelas equações

$$z = \sqrt{2}\ ;\ x^2 + y^2 = 3$$

   Portanto, na direcção z o conjunto V é constituído por duas regiões:

   i) Fixando $0 < z < \sqrt{2}$, obtemos em xy um círculo de raio $\sqrt{1+z^2}$.

   ii) Fixando $\sqrt{2} < z < \sqrt{5}$, obtemos um círculo de raio $\sqrt{5-z^2}$.

   Assim, o volume de V é dado por

$$\begin{aligned} vol_3(V) &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{1+z^2}} \left(\int_{-\sqrt{1+z^2-x^2}}^{\sqrt{1+z^2-x^2}} dy \right) dx \right) dz + \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(\int_{-\sqrt{5-z^2}}^{\sqrt{5-z^2}} \left(\int_{-\sqrt{5-z^2-x^2}}^{\sqrt{5-z^2-x^2}} dy \right) dx \right) dz \end{aligned}$$

   b) Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z), V é dado por

   i) Para $0 < z < \sqrt{2}$, temos $0 < \theta < 2\pi$; $0 < \rho < \sqrt{1+z^2}$

   ii) Para $\sqrt{2} < z < \sqrt{5}$, temos $0 < \theta < 2\pi$; $0 < \rho < \sqrt{5-z^2}$

   Portanto, o volume de V pode ser calculado da seguinte maneira

$$\begin{aligned} vol_3(V) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{1+z^2}} \rho d\rho \right) dz \right) d\theta + \int_0^{2\pi} \left(\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(\int_0^{\sqrt{5-z^2}} \rho d\rho \right) dz \right) d\theta \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{2}} (1+z^2) dz + \pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} (5-z^2) dz \\ &= \pi \frac{10\sqrt{5} - 8\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

3. Consideremos a transformação $(u, v) = g(x, y)$ definida por

$$\begin{aligned} u &= xy \\ v &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Então,

$$g(S) = \{(u,v) : 1 < u < 2 \ ; \ 1 < v < 3\}$$

ou seja, a função g transforma S no rectângulo $g(S)$.

Vejamos que g é uma mudança de coordenadas em S. É claro que g é de classe C^1. Da definição de g, obtemos

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y &= \sqrt{uv} \end{aligned}$$

e, portanto, g é invertível, ou seja, injectiva.

A derivada de g é dada pela matriz

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

e, tendo em conta que, $y > x > 0$, temos

$$\det Dg(x,y) = 2\frac{y}{x} > 0$$

Portanto, g é uma transformação de coordenadas.

Aplicando o teorema da mudança de variáveis e, tendo o cuidado de notar que a transformação de coordenadas a usar é a função g^{-1} e que

$$\det Dg^{-1}(u,v) = \frac{1}{2v}$$

obtemos

$$\int\int_S \frac{y}{x(1+x^2y^2)} dxdy = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(\int_1^2 \frac{1}{1+u^2} du\right) dv = \arctan(2) - \arctan(1)$$

4. a) Consideremos a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x,y,z) = xy + z + 3xz^5 - 4$$

Então, a superfície a considerar é dada pela equação $F(x,y,z) = 0$. Sendo F de classe C^1 e $F(1,0,1) = 0$, o teorema da função implícita garante que, numa vizinhança desse ponto, a superfície pode ser representada pelo gráfico de uma função $z = f(x,y)$, desde que a derivada $\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1) \neq 0$. De facto, temos

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1) = 16$$

b) Da alínea anterior, numa vizinhança do ponto $(1,0,1)$ temos

$$F(x,y,f(x,y)) = 0$$

e, derivando em ordem a x, no ponto $(1,0,1)$, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,0,1) + \frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0$$

e, portanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,0,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1)} = -\frac{3}{16}$$

5. a) Tendo em conta que a variedade M é o conjunto de nível zero da função $F(x, y, z) = z + x^2 + y^2 - 2$, o espaço normal no ponto $(0, \sqrt{2}, 0)$ é gerado pela derivada

$$DF(0, \sqrt{2}, 0) = (0, 2\sqrt{2}, 1)$$

b) Em coordenadas cilíndricas, a variedade M é dada pela equação $z = 2 - \rho^2$ em que $-1 < z < 1$. Então temos, $1 < \rho < \sqrt{3}$ e consideremos a parametrização definida por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, 2 - \rho^2) \; ; \; 0 < \theta < 2\pi \; ; \; 1 < \rho < \sqrt{3}$$

A área de M é dada por

$$vol_2(M) = \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\det Dg^t Dg} \, d\rho d\theta$$

Da definição de g, obtemos

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho \cos\theta \\ -2\rho & 0 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\det Dg^t Dg = \det \begin{bmatrix} 1 + 4\rho^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix} = \rho^2(1 + 4\rho^2)$$

Assim, temos

$$vol_2(M) = \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{3}} \rho\sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\rho d\theta = \frac{\pi}{6}(13\sqrt{13} - 5\sqrt{5})$$

c) Para usar o teorema da divergência consideremos o domínio D dado por

$$D = \{(x, y, z) : z < 2 - x^2 - y^2 \; ; \; -1 < z < 1\}$$

O domínio D contém na sua fronteira as superfícies

$$\begin{aligned} M &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2 \, ; \, |z| < 1\} \\ B &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 3 \, ; \, z = -1\} \\ T &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \, ; \, z = 1\} \end{aligned}$$

Pelo teorema da divergência, temos

$$\int\int\int_D \operatorname{div} F = \int\int_M F \cdot \nu + \int\int_B F \cdot \nu_B + \int\int_T F \cdot \nu_T$$

em que ν designa a normal unitária, exterior a D em M, e

$$\begin{aligned} \nu_B &= (0, 0, -1) \\ \nu_T &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

são, respectivamente, a normal unitária, exterior a D em B e em T.
Tendo em conta que

$$\begin{aligned} F \cdot \nu_B &= 0 \\ F \cdot \nu_T &= 0 \end{aligned}$$

obtemos

$$\int\int\int_D \operatorname{div} F = \int\int_M F\cdot\nu$$

Por outro lado, dado que $\operatorname{div} F = 2z$, temos

$$\begin{aligned}\int\int_M F\cdot\nu &= \int_0^{2\pi}\left(\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{2-z}} 2z\rho\, d\rho\right) dz\right) d\theta\\ &= 2\pi\int_{-1}^{1} z(2-z)dz\\ &= -\frac{4}{3}\pi\end{aligned}$$

Tendo em conta que a normal ν tem terceira componente positiva, concluimos que o fluxo de F através de M segundo a normal com terceira componente negativa é igual a $\frac{4}{3}\pi$.

6. Por ser dada por uma equação, a superfície S é orientável e, usando o teorema de Stokes, temos

$$\int\int_S \operatorname{rot} F\cdot\nu = \int_{\partial S} F\cdot d\gamma$$

em que ν designa a normal unitária a S com terceira componente positiva e γ é o caminho que descreve a fronteira ou bordo ∂S no sentido compatível com a orientação de S induzida pela normal ν.

A fronteira ∂S é dada por

$$\partial S = \{(x,y,z) : z = 1\ ;\ x^2+y^2 = \frac{1}{\alpha}\}$$

e deve ser percorrida no sentido directo, ou seja, pode ser parametrizada por

$$\gamma(t) = (\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{sen} t, 1)\ ;\ 0 < t < 2\pi$$

Então,

$$\begin{aligned}\int\int_S \operatorname{rot} F\cdot\nu &= \int_{\partial S} F\cdot d\gamma\\ &= \int_0^{2\pi}(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{sen} t, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cos t, e^{\frac{1}{\alpha}\cos t\operatorname{sen} t})\cdot(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{sen} t, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cos t, 0)dt\\ &= \frac{2\pi}{\alpha}\end{aligned}$$

e, portanto

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

7. Dado que f é uma função contínua em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, é integrável em qualquer subconjunto compacto da forma

$$B_k = \{(x,y) : \frac{1}{k} \leq x^2+y^2 \leq k\}\ ;\ k = 1,2,3,\ldots$$

Assim, consideremos a sucessão de funções (f_k) definidas por

$$f_k(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y)\in B_k\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}$$

Então,

i) As funções f_k são integráveis em $\mathbb{R}^2$ e $\lim_{k\to\infty} f_k = f$, qtp.

ii) A sucessão (f_k) é crescente porque $f > 0$ e $B_k \subset B_{k+1}$.

iii) A sucessão de integrais $(\int_{\mathbb{R}^2} f_k)$ é convergente. De facto, em coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f_k &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{1}{1+\rho^2}\, d\rho \right) d\theta \\ &= 2\pi(\arctan(k) - \arctan(\frac{1}{k}))\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_k = \pi^2$$

Assim, invocando o teorema da convergência monótona, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_k = \pi^2$$