**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

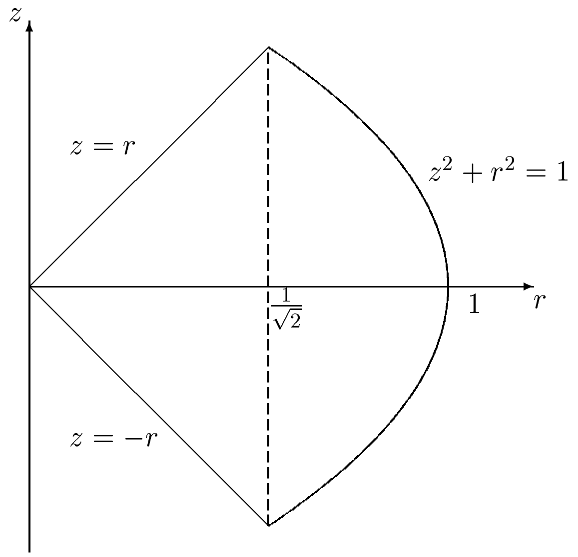
# Análise Matemática III

Resolução do 2º Teste e 1º Exame - 20 de Janeiro 2000 - 9 horas

1. O sólido tem simetria cilíndrica em torno do eixo Oz. A expressão de $S$ em coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$ é:

$$r^2 + z^2 \leq 1;\ r^2 \geq z^2 \Leftrightarrow r \geq |z|$$

portanto $S$ é o sólido que se obtem rodando a seguinte figura em torno do eixo Oz:




a) Em coordenadas esféricas $(r, \theta, \phi)$, o sólido escreve-se

$$r^2 \leq 1;\ r^2 \mathrm{sen}^2\phi \geq r^2 \cos^2\phi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}$$

portanto uma expressão para o volume em coordenadas esféricas é dada por:

$$\mathrm{Vol}(S) = \int_S 1 = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 r^2 \mathrm{sen}\phi \, dr d\phi d\theta$$

b) Tendo em conta a figura acima, a expressão para o volume em coordenadas cilíndricas é dada por

$$\mathrm{Vol}(S) = \int_S 1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-r}^{r} r \, dz dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r \, dz dr d\theta$$

c) A massa é dada pelo integral de volume da densidade de massa. Vamos usar coordenadas esféricas porque são as coordenadas em que o volume se expressa de forma mais simples. Como $z = r\cos\phi$ temos

$$\begin{aligned}
\int_S z^2 &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^1 r^2\cos^2\phi r^2 \mathrm{sen}\phi\, dr d\phi d\theta \\
&= 2\pi\int_0^1 r^4 dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \mathrm{sen}\phi \cos^2\phi d\phi \\
&= 2\pi\frac{1}{5}\left[-\frac{cos^3\phi}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}$$

2. Uma vez que $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, a expressão da função integranda e da região de integração sugerem a mudança de variáveis linear

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

Esta transformação $g(x,y) = (x+y, x-y)$ é de facto uma transformação de coordenadas em $\mathbb{R}^2$: o determinante da matriz que representa a transformação é

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Portanto $g$ é bijectiva. Como $g$ é igual à sua derivada $Dg$, é $C^1$ e tem derivada injectiva. Portanto é uma transformação de coordenadas. O jacobiano da transformação inversa é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{2}$$

e nas novas coordenadas $(u,v)$ a região $A$ escreve-se

$$\begin{aligned}
x + y < 1 &\Leftrightarrow u < 1 \\
y > 0 &\Leftrightarrow \frac{u-v}{2} > 0 \Leftrightarrow u > v \\
y < x \Leftrightarrow x - y > 0 &\Leftrightarrow v > 0
\end{aligned}$$

Pelo teorema de mudança de variáveis, temos[1]

$$\begin{aligned}
\int_A e^{-(x+y)^4}(x^2 - y^2)dxdy &= \int_0^1\int_0^u e^{-u^4} uv\frac{1}{2} dvdu \\
&= \int_0^1 \frac{u^3}{4}e^{-u^4}du = \left[-\frac{1}{16}e^{-u^4}\right]_0^1 = \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{e}\right)
\end{aligned}$$

[1]Note que a escolha da ordem de integração nas novas variáveis é importante. Na outra ordem não se consegue calcular o integral.

3. Seja $L$ a recta com equação cartesiana $x + y = 4$. Temos de achar o mínimo sobre $E$ da função $d(x,y) =$ "distância de $(x,y)$ à recta $L$" . A distância à recta é medida sobre a recta perpendicular a $L$ que passa pelo ponto $(x,y)$. Esta recta tem equação paramétrica

$$(x,y) + t(1,1),\ t \in \mathbb{R}$$

(já que $(1,1)$ é um vector perpendicular a $L$). O ponto de intersecção com a recta $L$ corresponde ao parâmetro $t$ tal que

$$x + t + y + t = 4 \Leftrightarrow t = 2 - \frac{1}{2}(x+y)$$

A distância de $(x,y)$ a $L$ é o comprimento do vector $t(1,1)$ para esse valor do parâmetro $t$, isto é

$$||(2 - \frac{1}{2}(x+y), 2 - \frac{1}{2}(x+y))|| = \sqrt{2}|2 - \frac{1}{2}(x+y)|$$

Uma vez que sobre $E$ (uma elipse com semieixos de comprimento $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$) temos $2 - \frac{1}{2}(x+y) > 0 \Leftrightarrow x + y < 4$, a expressão de $d(x,y)$ sobre $E$ é

$$d(x,y) = 2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$

Para minimizarmos esta função sobre $E$ usamos o método dos multiplicadores de Lagrange. Seja $g(x,y) = 2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) - \lambda(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - 1)$. Então um ponto de mínimo de $d$ sobre $E$ tem de ser solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - x\lambda = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}y\lambda = 0 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}\lambda} \\ y = -\frac{3}{2\sqrt{2}\lambda} \\ \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right)\frac{1}{\lambda^2} = 1 \end{cases}$$

onde usámos o facto de que $\lambda$ não se pode anular devido às duas primeiras equações do sistema. Este sistema tem soluções

$$(x,y,\lambda) = \pm\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)$$

Como $d$ é uma função contínua e $E$ é compacto, pelo teorema de Weierstrass $d$ tem máximo e mínimo em $E$ e pelo método dos multiplicadores de Lagrange estes têm de ser atingidos nos pontos

$$(x,y) = \pm\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

Como $d(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}) = 2\sqrt{2} + \frac{5}{\sqrt{10}}$ e $d(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}) = 2\sqrt{2} - \frac{5}{\sqrt{10}}$ concluímos que o ponto de $E$ mais próximo de $L$ é o ponto

$$(x,y) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

4. a) Seja $F(x,y,z) = z - \cos(x^2+y^2)$. Então $M$ é definida pela equação cartesiana $F(x,y,z) = 0$ portanto um vector normal a $M$ no ponto $(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0, 0)$ é dado por $\nabla F(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0, 0)$. Ora

$$\nabla F(x,y,z) = (2x\text{sen}(x^2+y^2), 2y\text{sen}(x^2+y^2), 1)$$

portanto

$$T_{(\sqrt{\frac{\pi}{2}},0,0)}M^{\perp} = \{t(\sqrt{2\pi}, 0, 1) : t \in \mathbb{R}\}$$

e o espaço tangente é o complemento ortogonal deste, isto é

$$T_{(\sqrt{\frac{\pi}{2}},0,0)}M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{2\pi}x + z = 0\}$$

b) $M$ é um pedaço do gráfico da função $\cos(x^2+y^2)$ portanto uma parametrização para $M$ é dada por

$$g(x,y) = (x, y, \cos(x^2+y^2));\ x^2+y^2 < \pi$$

Temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2x\text{sen}(x^2+y^2) \\ 0 & 1 & -2y\text{sen}(x^2+y^2) \end{vmatrix} \\ &= (2x\text{sen}(x^2+y^2), 2y\text{sen}(x^2+y^2), 1)\end{aligned}$$

Portanto uma expressão para a área de $M$ é dada por

$$\begin{aligned}\int_M 1 &= \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{\pi-x^2}}^{\sqrt{\pi-x^2}} \left|\left|\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y}\right|\right| dydx \\ &= \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{\pi-x^2}}^{\sqrt{\pi-x^2}} \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)\text{sen}^2(x^2+y^2)}dxdy\end{aligned}$$

5. a) Podemos aplicar o teorema da divergência ao volume

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1,\ y > 0\}$$

A fronteira de $V$ é $\partial V = S \cup D$ onde $D$ é a "tampa"

$$D = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 \leq 1\}$$

Como a normal a $S$ dada é a normal interior a $V$, e a normal a $D$ unitária exterior a $V$ é $(0,-1,0)$, o teorema da divergência diz que

$$\int_V \text{div}F = -\int_S F.n + \int_D F.(0,-1,0)$$

isto é

$$\int_S F.n = \int_D -yz^2 - \int_V z^2$$

O primeiro termo é 0 porque a função integranda é constante igual a 0 em $D$. Para calcular o segundo termo podemos usar coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}\int_V z^2 &= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^1 r^2 \cos^2\phi r^2 \text{sen}\phi dr d\phi d\theta \\ &= \pi \int_0^\pi \frac{1}{5}\text{sen}\phi \cos^2\phi d\phi \\ &= \frac{2\pi}{15}\end{aligned}$$

A conclusão é que o fluxo de $F$ através de $S$ no sentido indicado é

$$\int_S F.n = -\frac{2\pi}{15}$$

b) Para calcular o fluxo de rot$G$ podemos usar o teorema de Stokes. Este teorema diz que

$$\int_S \text{rot}G.n = \oint_{\partial S} G$$

onde $\partial S$ é percorrida no sentido dado pela regra da mão direita. O bordo de $S$ é a circunferência

$$\partial S = \{(x, 0, z) : x^2 + z^2 = 1\}$$

e a regra da mão direita aplicada à normal $n$ diz que $\partial S$ deve ser percorrida no sentido que visto do eixo negativo dos $y$ é contrário ao dos ponteiros do relógio. Assim uma parametrização para $\partial S$ é dada por

$$g(t) = (\cos t, 0, \text{sen}t),\ 0 < t < 2\pi$$

e

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} G &= \int_0^{2\pi} (-\alpha\text{sen}t + \cos t, \sqrt{\alpha}, \alpha\cos t + \text{sen}t).(-\text{sen}t, \cos t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} \alpha dt \\ &= 2\pi\alpha\end{aligned}$$

Concluímos que para que o fluxo de rot$G$ seja igual a $10\pi$ é necessário que $\alpha = 5$.

6. a) Seja $f : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-5\sqrt{x}}$.
Há duas razões porque não podemos calcular directamente o integral de $f$. Uma é que a região de integração é ilimitada e a outra é que a função $f$ não é limitada numa vizinhança de 0. Assim vamos usar o teorema da convergência monótona para escrever o integral

como o limite de uma sucessão de integrais que podemos calcular directamente.
Seja $f_k :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ a sucessão de funções definidas por

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-5\sqrt{x}} & \text{se } \frac{1}{k} \leq x \leq k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então para todo o $k$, $f_k$ é integrável em $[0,+\infty[$ porque

$$\int_0^{+\infty} f_k = \int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-5\sqrt{x}} dx$$

é o integral de uma função contínua num intervalo compacto.
Como a função $f$ é positiva, a sucessão de funções $f_k$ é crescente (isto é, $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ para todo o $x \in [0,+\infty[$).
Finalmente, temos

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-5\sqrt{x}} dx &= -\frac{2}{5} \int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{5}{2\sqrt{x}} e^{-5\sqrt{x}} dx \\ &= -\frac{2}{5} e^{-5\sqrt{x}} \Big|_{\frac{1}{k}}^{k} \\ &= \frac{2}{5} \left( e^{-\frac{5}{\sqrt{k}}} - e^{-5\sqrt{k}} \right) \end{aligned}$$

Portanto a sucessão dos integrais $\int_0^{+\infty} f_k$ é limitada, (converge para $\frac{2}{5}$).
Como $f_k(x) \to f(x)$ para todo o $x \in ]0,+\infty[$ quando $k$ tende para $\infty$, o teorema da convergência monótona garante que $f$ é integrável em $]0,+\infty[$ e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-5\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5}$$

b) A função $f$ decresce para 0 como $\frac{1}{x}$ quando $x$ tende para infinito portanto não é integrável. Para justificar esta afirmação rigorosamente podemos notar que, como a função $f$ é positiva, se o integral existir teremos para todo o número natural $k$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx > \int_0^{k} \frac{1}{x+1} dx = \log(x+1)|_0^k = \log(k+1)$$

Como não existe nenhum número real que verifique estas condições para todo o $k$ concluímos que o integral não existe.