Análise Matemática III - Exercícios-Desafio

(Os exercícios têm uma indicação $*, **$, ou $***$ consoante o grau relativo de dificuldade.)

Exercício-Desafio 1**

Mostre que o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função monótona definida num intervalo compacto $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tem medida nula.

Exercício-Desafio 2**

a) Dê um exemplo de uma função contínua, $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, tal que $f \geq 0$ e $f \in L([0, +\infty[)$ mas tal que seja <u>falso</u> que $lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) Uma função diz-se Lipschitz se existe um $M > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para todos os x, y no domínio de f.

   Mostre que se $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é tal que $f \geq 0$, $f \in L([0, +\infty[)$ e f é Lipschitz, então necessariamente tem-se $lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   (Nota: Em particular, se f for diferenciável com derivada majorada então vai satisfazer a condição de ser Lipschitz.)

Exercício-Desafio 3*

Assumindo a validade do Teorema da Função Inversa, demonstre o Teorema da Função Implícita.

Sugestão: Considere $F : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ com $n > m$, com S aberto e F de classe C^1 e as equações $F(z, y) = 0$ com $(z, y) \in S$ e $z \in \mathbb{R}^{n-m}$ e $y \in \mathbb{R}^m$. Considere a função $H : S \to \mathbb{R}^n$ definida por $H(z, y) = (z, F(z, y))$. Aplique o Teorema da função inversa à função H.

Exercício-Desafio 4***

O objectivo deste exercício é demonstrar, através de vários passos relativamente simples, um caso particular do <u>Teorema de Sard</u> que diz o seguinte:

"Seja $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 num aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. Seja $B = \{x \in A : \det DG(x) = 0\}$ o conjunto dos pontos onde a derivada de g é singular. Então o conjunto $g(B)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$."

Ou seja, o Teorema de Sard diz que as imagens por g dos pontos onde Dg é singular formam um conjunto de medida nula. O exercício é demonstrar este resultado em seis passos simples:

Passo 1. Seja l suficientemente pequeno e $U \subset A \subset \mathbb{R}^n$ um cubo-n fechado de lado l. Seja $\epsilon > 0$. Seja $N > 1$ um inteiro e divida-se U em N^n sub-cubos-n de lado l/N. Seja S um desses sub-cubos e $x \in S$.

Mostre que para N suficientemente grande se tem

$$|Dg(x) \cdot (x - y) - g(y) + g(x)| < \epsilon|x - y| \leq \epsilon\sqrt{n}l/N, \ \ \forall y \in S.$$

Sugestão: A função g é diferenciável. Utilize a definição e propriedades de Dg.

Passo 2. Suponha que $x \in S \bigcap B$. Mostre que o conjunto $\{Dg(x) \cdot (x - y) : y \in S\}$ está contido num plano-$(n - 1)$, V, em $\mathbb{R}^n$.

Sugestão: Esta parte é só álgebra linear. Observe apenas o que significa $\det DG(x) = 0$.

Passo 3. Mostre que a distância do conjunto $\{g(y) : y \in S\}$ ao plano-$(n - 1)$ dado por $g(x) + V$, é menor do que $\epsilon\sqrt{n}(l/N)$.

Sugestão: Utilize os passos 1 e 2.

Passo 4. Mostre que existe um $M > 0$ tal que

$$|g(y) - g(z)| < M|y - z| \leq M\sqrt{n}(l/N), \ \ \forall y, z \in S.$$

Sugestão: As derivadas parciais de g são contínuas no compacto U que contém S. Observe então que $g_j(y)-g_j(z) = g_j(y_1, ..., y_n)-g_j(z_1, y_2, ..., y_n)+g_j(z_1, y_2, ..., y_n)-g_j(z_1, z_2, y_3, ..., y_n)+g_j(z_1, z_2, y_3, ..., y_n)+\cdots+g_j(z_1, ..., z_{n-1}, y_n)-g_j(z_1, ..., z_{n-1}, z_n)$. Aplique o teorema do valor intermédio.

Passo 5. Conclua que, se S intersecta B, o conjunto $\{g(y) : y \in S\}$ está contido num cilindro-n de altura $< 2\epsilon\sqrt{n}(l/N)$ e com base dada por uma bola-$(n-1)$ de raio $< M\sqrt{n}(l/N)$. Conclua que $g(U \bigcap B)$ tem medida nula.

Passo 6. Conclua que $g(B)$ tem medida nula.

Exercício-Desafio 5**

O método dos multiplicadores de Lagrange permite encontrar os pontos críticos de uma função f de classe C^1 num variedade M. Este exercício fornece um critério para determinar a natureza desses pontos críticos (máximo ou mínimo local):

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $M \subset S$ uma variedade-m. Seja f um campo escalar de classe C^2 definido em S e seja $p \in M$ um ponto crítico de $f_{|_M}$ tal que, de acordo com o método dos multiplicadores de Lagrange, a função $g = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + ... + \lambda_{n-m} F_{n-m}$, definida numa vizinhança aberta U de p, tem um ponto crítico em p, onde $M \bigcap U = \{x \in U : F_j(x) = 0, \ \ j = 1, ..., n-m\}$ e $\lambda_j \in \mathbb{R}$ para $j = 1, ..., n-m$.

Seja $H(p)$ a matriz Hessiana de g, i.e. a matriz das segundas derivadas parciais de g. Mostre que:

a) Para que p seja um mínimo relativo é necessário que $(v, H(p)v) \geq 0$, $\forall$ vector v no espaço tangente a M em p.

b) Para que p seja um mínimo relativo é suficiente que $(v, H(p)v) > 0$, $\forall$ vector v no espaço tangente a M em p.

c) Para que p seja um máximo relativo é necessário que $(v, H(p)v) \leq 0$, $\forall$ vector v no espaço tangente a M em p.

d) Para que p seja um máximo relativo é suficiente que $(v, H(p)v) < 0$, $\forall$ vector v no espaço tangente a M em p.

Sugestão: Se $p \in M$ é um mínimo (ou máximo) relativo então pense no que acontece aos valores de f sobre curvas que passam em p. Lembre-se de utlizar o facto de p ser um ponto crítico de g. i.e. $\nabla g(p) = 0$.

Exercício-Desafio 6**

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-m. Mostre que localmente M é o gráfico de uma função, i.e.:

Mostre que $\forall p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in U$, e um aberto $V \in \mathbb{R}^m$ e uma função $f : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^1 tal que é possível escolher coordenadas em $\mathbb{R}^n$ de modo a que

$$M \bigcap U = \{(z, f(z)) : z \in V\}.$$

Sugestão: Considere uma parametrização de uma vizinhança de p, na forma $g : A \to M \bigcap S$ com $A \subset \mathbb{R}^m$ e $S \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Com coordenadas $t_1, t_2, ..., t_m$ em A, a parametrização g tem a forma $g(t_1, ..., t_m) = (g_1(t_1, ..., t_m), ..., g_m(t_1, ..., t_m))$. Tente agora usar o teorema da função implícita para escrever $(n-m)$ das coordenadas dos pontos de $M \bigcap U$ em função das restantes m coordenadas. Lembre-se que, por definição, se g é uma parametrização então Dg tem característica máxima m em todos os pontos de A. Recorde também que a característica de uma matriz é dada pelo número de colunas linearmente independentes que é igual também ao número de linhas linearmente independentes.

Exercício-Desafio 7*

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-m. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $M \bigcap U$ uma vizinhança de coordenadas, i.e. um sub-conjunto de M que é parametrizável. Seja $f : M \bigcap U \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $M \bigcap U$.

Mostre que $\int_{M \bigcap U} f$ não depende da parametrização utilizada para calcular o integral.

Sugestão: Imagine que tem duas parametrizações diferentes de $M \bigcap U$ e tente relacionar as expressões correspondentes para $\int_{M \bigcap U} f$.

Exercício-Desafio 8*

Mostre que o teorema da divergência em $\mathbb{R}^2$ é equivalente ao teorema de Green.

Sugestão: Considere o campo vectorial $f = (f_1, f_2)$ e o campo vectorial $h = (f_2, -f_1)$. Aplique o teorema da divergência ao campo h. Lembre-se que se $(a, b) \cdot (b, -a) = 0$.

Exercício-Desafio 9**

Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície. Seja $S \subset M$ uma superfície tal que a fronteira ∂S é uma variedade-1 compacta e tal que $g : A \subset \mathbb{R}^3 \to S$, com $A \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, é uma parametrização de S que pode ser estendida ao fecho de A de modo a que $g(\partial A) = \partial S$.

Seja n uma orientação de S e oriente-se a sua fronteira ∂S de modo consistente. Seja f um campo vectorial de classe C^1 definido num aberto de $U \subset \mathbb{R}^3$ com $S \subset U$.

Utilizando o teorema de Green, demonstre o teorema de Stokes:

$$\int_S \operatorname{rot} f \cdot n = \oint_{\partial S} f.$$

Sugestão:

Passo 1. Escreva a a expressão explícita para $\int_S \operatorname{rot} f \cdot n$ utilizando a parametrização g. Lembre-se que pode escrever n utilizando g.

Passo 2. Re-arrume a integranda até que ela fique da forma propícia para aplicação do teorema de Green. Aplique o teorema de Green.

Passo 3. Re-escreva o resultado na forma $\oint_{\partial S} f$.

Exercício-Desafio 10*

Considere o aberto $S \subset \mathbb{R}^2$ dado pela união dos seguinte conjuntos: o rectângulo $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1, 0 < x < 5\}$, o rectângulo $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 3, 1 < x < 2\}$ e a coroa circular $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < (x - 3)^2 + y^2 < 4, y < 0\}$.

a) Verifique que o teorema de Green não é válido num aberto com a forma de S.

b) Encontre a maneira de rectificar o teorema de Green para um aberto com a forma de S.

Sugestão: Aplique o teorema de Green a R_1, R_2 e a D e combine os resultados.