Análise Matemática III
1º semestre de 2001/02

Exercício Teste 9
Ricardo Grandêncio[1], é um prestigiado vereador da cultura e desporto da Câmara de Ribanceira de Baixo. Para manter o cargo necessita de se assegurar que no ano de 2025, em que tinha 24 anos de idade, a derivada do orçamento da cultura v em ordem ao tempo t_1 é negativa, mantendo constante a variável t_2 que mede o tempo do dado executivo menos o orçamento do desporto, u.

As quatro variáveis, (t_1, t_2, u, v), satisfazem (para certa escolha das origens) a misteriosa relação determinada pelo brilhante matemático e economista André Gil Gaudêncio (por ele designada relação elíptica, vá-se lá saber porquê)

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1^2 - t_2^2 - u^3 + 3uv^2 - 2u + 3 = 0 \\ 2t_1t_2 - 3u^2v + v^3 - 2v = 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

e em 2025 $(t_1, t_2, u, v) = (1, 2, 1, 1)$.

Diga qual foi o valor de $\frac{\partial v}{\partial t_1}$ que Ricardo G encontrou.
(**Sugestão:** Aplique o teorema da função implícita para mostrar que, numa vizinhança do ponto $(1, 2, 1, 1)$, a relação (1) acima define (u, v) como função de (t_1, t_2) e calcule a derivada parcial pedida usando o mesmo teorema.)

Resolução:
De acordo com o teorema da função implícita para que a relação (1) defina, numa vizinhança do ponto $p_0 = (t_{1_0}, t_{2_0}, u_0, v_0)$ que satisfaz a (1), (u, v) como função de (t_1, t_2), é suficiente que

$$J_{(u,v)}F(t_{1_0}, t_{2_0}, u_0, v_0) = \det\left(\frac{\partial F}{\partial(u, v)}\right)(t_{1_0}, t_{2_0}, u_0, v_0) \neq 0 \ ,$$

onde $F = (F_1, F_2) \ : \ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ é a função de classe C^∞ definida por (1), i.e.

$$F_1(t_1, t_2, u, v) \ = \ t_1^2 - t_2^2 - u^3 + 3uv^2 - 2u + 3$$

e

$$F_2(t_1, t_2, u, v) \ = \ 2t_1t_2 - 3u^2v + v^3 - 2v.$$

Comecemos por verificar que o ponto $p_0 = (1, 2, 1, 1)$ satisfaz a (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - 4 - 1 + 3 - 2 + 3 = 0 \\ 4 - 3 + 1 - 2 = 0 \ . \end{array} \right.$$

[1]Nota histórica: Depois de aturadas investigações os historiadores concluiram não haver relação entre a linhagem relativamente modesta de Grandêncios, iniciada com o nosso heroi, e a influente linhagem dos Gaudêncios, devendo ser atribuída a uma daquelas coincidências frequentes em História a permanência para repouso em Ribanceira de Cima de Valdevinos Gaudêncio no longinquo ano de 2001.

Calculemos agora a matriz 2×4 da derivada de F, DF, no ponto em questão,

$$
\begin{aligned}
DF(1,2,1,1) &= \begin{pmatrix} 2t_1 & -2t_2 & -3u^2+3v^2-2 & 6uv \\ 2t_2 & 2t_1 & -6uv & -3u^2+3v^2-2 \end{pmatrix}\Big|_{(1,2,1,1)} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & -6 & -2 \end{pmatrix} . \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Temos então

$$
J_{(u,v)}F(1,2,1,1) = \det\left(\frac{\partial F}{\partial(u,v)}\right)(1,2,1,1) = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 40 \neq 0 \qquad (3)
$$

pelo que a relação (1) define, numa vizinhança do ponto $(1,2,1,1)$, (u,v) como função de classe C^∞ de (t_1,t_2).

Para calcular derivadas parciais em ordem a t_1 das funções definidas implicitamente por (1) derivemos estas relações em ordem a t_1

$$
\begin{aligned}
2t_1 - 3u^2\frac{\partial u}{\partial t_1} + 3\frac{\partial u}{\partial t_1}v^2 + 6uv\frac{\partial v}{\partial t_1} - 2\frac{\partial u}{\partial t_1} &= 0 \\
2t_2 - 6u\frac{\partial u}{\partial t_1}v - 3u^2\frac{\partial v}{\partial t_1} + 3v^2\frac{\partial v}{\partial t_1} - 2\frac{\partial v}{\partial t_1} &= 0 \ ,
\end{aligned}
$$

o que, no ponto $(1,2,1,1)$, dá o sistema

$$
\begin{aligned}
-2\frac{\partial u}{\partial t_1}(1,2) + 6\frac{\partial v}{\partial t_1}(1,2) &= -2 \qquad (4) \\
-6\frac{\partial u}{\partial t_1}(1,2) - 2\frac{\partial v}{\partial t_1}(1,2) &= -4
\end{aligned}
$$

Como era de esperar (ver aulas teóricas) obtivémos um sistema de equações lineares não homogéneas tendo como matriz precisamente a matriz não singular $\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(1,2,1,1)$ calculada em (2), (3). A solução é

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t_1} \\ \frac{\partial v}{\partial t_1} \end{pmatrix}\Big|_{(1,2)} &= \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{40}\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

O valor que Ricardo Gaudêncio encontrou foi assim, para sua satisfação e alívio, $\frac{\partial v}{\partial t_1}(1,2) = -\frac{1}{10}$.