CDI-I-LEGM, MEC

14^a Aula Prática

I. Séries Numéricas.

Definição.

Uma série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diz-se **convergente (em $\mathbb{R}$)** sse a sucessão das suas somas parciais, de termo geral $S_n = \sum_{k\tilde{}=0}^{n} a_k$, for convergente (quando isto não acontecer, a série dir-se-á **divergente**).

Sendo $S \in \mathbb{R}$ tal que $S = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n$, diz-se que S é a soma da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, escrevendo-se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S \ .$$

(Por vezes, o somatório começa num número natural diferente de 0).

Uma série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diz-se **absolutamente convergente** sse a série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ for convergente.

Uma série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diz-se **simplesmente convergente** (ou **condicionalmente convergente**) sse for convergente mas não for absolutamente convergente.

Tem-se o seguinte resultado importante:

Proposição.

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente$\Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = 0$.

No entanto, pode acontecer que se tenha $\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = 0$, sendo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ divergente , como veremos , mais adiante, quando apresentarmos a **série harmónica.**

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ é convergente.

Exemplos.
1) A Série Geométrica de Razão x .

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \ .$$

Esta série converge sse $|x| < 1$, tendo-se:

$$|x| < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \ .$$

Por exemplo, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é convergente, tendo-se:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \ .$$

Mas, $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n$ é divergente.

2) As Séries Redutíveis ou de Mengoli.
Estas séries têm a forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) \ .$$

Estas séries convergem sse (a_n) é convergente, tendo-se:

$$(a_n) \text{ é convergente} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_0 - \lim_{n \longrightarrow +\infty} a_{n+1} \ .$$

Por exemplo, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ é convergente, tendo-se:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0 \ .$$

3) Séries de Dirichlet.
Estas séries têm a forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ , sendo } \alpha \text{ um número real fixo .}$$

Estas séries convergem sse $\alpha > 1$.

Por exemplo, a **série harmónica**: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$, é divergente; mas $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ são convergentes.

Séries de Termos Não-Negativos.

Critério Geral de Comparação.
Sejam $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ séries tais que, a partir de certa ordem, se tenha

$$0 \leq a_n \leq b_n \ .$$

Então:
a)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ é convergente} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ é convergente .}$$

b)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ é divergente} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ é divergente .}$$

Como consequência do critério anterior, tem-se:

Corolário.
Sejam $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ séries de termos positivos tais que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \text{ , com } 0 < l < +\infty \ .$$

Então:

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ têm a mesma natureza (isto é, são ambas convergentes ou ambas divergentes).

Critério da Raiz de Cauchy.

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não-negativos tal que $\overline{\lim_{n\longrightarrow+\infty}}\sqrt[n]{a_n}=l\in[0,+\infty]$.
Então:

a) $l<1\Longrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente,

b) $l>1\Longrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente,

sendo $\overline{\lim_{n\longrightarrow+\infty}}\sqrt[n]{a_n}$ (**limite superior** da sucessão $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$) o maior dos sublimites da sucessão $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$.
(é claro que, quando $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ é convergente (em $\overline{\mathbb{R}}$), se tem $\overline{\lim_{n\longrightarrow+\infty}}\sqrt[n]{a_n}=$
$=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{a_n})$.

Como consequência imediata, tem-se:

Critério de d'Alembert.

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos tal que $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l\in[0,+\infty]$.
Então:

a) $l<1\Longrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente,

b) $l>1\Longrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Critério do Integral.

Sejam p um número natural fixo, $f:[p,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função decrescente não-negativa e (t_n) a sucessão de termo geral $t_n=\int_p^n f(x)\,dx$, para $n\geq p$.

Então:

a) $\sum_{n=p}^{+\infty} f(n)$ é convergente$\Longleftrightarrow(t_n)$ é convergente.

b) $\sum_{n=p}^{+\infty} f(n)$ é divergente$\Longleftrightarrow(t_n)$ é divergente.

Séries Alternadas.

Definição. Uma série alternada tem a forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots \ ,$$

sendo (a_n) uma sucessão de termos não-negativos.

Tem-se o seguinte critério de convergência:

Critério de Leibniz.

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ uma série alternada, tal que (a_n) é uma sucessão decrescente e $\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = 0$.

Então:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \text{ é convergente.}$$

Mais ainda, o erro cometido quando se substitui a soma da série, S , pela soma parcial de ordem n , S_n , é dado por:

$$|S - S_n| \leq a_{n+1} \ .$$

Como aplicação imediata deste critério, verificamos que a **série harmónica alternada:** $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \cdots$, é convergente. Visto que a série harmónica é divergente, conclui-se que a série harmónica alternada é simplesmente convergente.

Resolvamos alguns exercícios:

1) Provemos que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{3}{2}$.

Ora,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{6^{n+1}} = \frac{2}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{6}\right)^n + \frac{3}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^n \underset{\text{temos duas séries geométricas com } |x|<1}{=}$$
$$= \frac{2}{6} \frac{1}{1-\frac{2}{6}} + \frac{3}{6} \frac{1}{1-\frac{3}{6}} = \frac{2}{6} \frac{1}{\frac{4}{6}} + \frac{3}{6} \frac{1}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \ .$$

2) Provemos que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} = \frac{5}{3}$.

Ora,

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} =$

$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \underset{\text{temos duas séries geométricas com } |x|<1}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} =$

$= 2 - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{3}{2}} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$.

3) Determinemos a natureza (convergência ou divergência) das seguintes séries.

a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Ora, para $n \geq 1$, tem-se:

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \in]0,+\infty[.$

Sendo assim, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ têm a mesma natureza.

Ora, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ é divergente (é uma série de Dirichlet com $\alpha < 1$).

Logo,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \text{ é divergente.}$$

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(n+1)}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Ora,

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \sqrt{1} = 1 \in]0,+\infty[.$

Sendo assim, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ têm a mesma natureza.

Ora, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ é divergente (é uma série de Dirichlet com $\alpha < 1$).

Logo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{ é divergente.}$$

c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{4^n+1}$.

Ora,

$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{5^n}{4^n+1}}{\left(\frac{5}{4}\right)^n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{4^n}{4^n+1} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{4^n}} = 1 \in \left]0, +\infty\right[$.

Sendo assim, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{4^n+1}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$ têm a mesma natureza.

Ora, $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$ é divergente (é uma série geométrica com $|x| > 1$).

Logo,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{4^n+1} \text{ é divergente.}$$

d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$.

Ora, para $n \geq 1$, tem-se:

$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!}\right) \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right) = \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n+1}\right) \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right) =$

$= (0)\,(1) = 0 < 1$.

Logo, pelo Critério de d'Alembert:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} \text{ é convergente.}$$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

Ora, para $n \geq 1$, tem-se:

$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = 2 \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{1}{n+1}\right) \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}\right) =$

$= 2\,(1) \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right) = 2\,(1)\,\frac{1}{e} = \frac{2}{e} < 1$.

Logo, pelo Critério de d'Alembert:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \text{ é convergente.}$$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n}$.

Seja $f : [3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{\log x}{x}$.

É claro que f é não-negativa.

Por outro lado, para qualquer $x \in [3, +\infty[$:

$f'(x) = \left(\frac{\log x}{x}\right)' = \frac{1-\log x}{x^2} < 0$.

Logo, f é decrescente.

Ora, para $n \geq 3$:

$t_n = \int\limits_3^n \frac{\log x}{x}\, dx = \int\limits_3^n \frac{1}{x}. \log x\, dx = \left[\frac{\log^2 x}{2}\right]_3^n =$

$= \frac{1}{2}\left(\log^2 n - \log^2 3\right)$.

Visto que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} t_n = +\infty$, conclui-se, pelo Critério do Integral, que $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\log n}{n}$ é divergente (em $\mathbb{R}$); logo, o mesmo acontece com $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\log n}{n}$.

g) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$.

Seja $f : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{1}{x \log x}$.

É claro que f é não-negativa.

Por outro lado, para qualquer $x \in [2, +\infty[$:

$f'(x) = \left(\frac{1}{x \log x}\right)' = \frac{-\log x - 1}{x^2 \log^2 x} = -\frac{\log x + 1}{x^2 \log^2 x} < 0$.

Logo, f é decrescente.

Ora, para $n \geq 2$:

$t_n = \int\limits_2^n \frac{1}{x \log x}\, dx = \int\limits_2^n \frac{\frac{1}{x}}{\log x}\, dx = [\log(\log x)]_2^n =$

$= (\log(\log x) - \log(\log 2))$.

Visto que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} t_n = +\infty$, conclui-se, pelo Critério do Integral, que $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$ é divergente (em $\mathbb{R}$) .

4) Determinemos se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries.

a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Ora,

$\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$ é decrescente e $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 0$.

Logo, pelo Critério de Leibniz,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} \text{ é convergente.}$$

Consideremos a série dos módulos:
$\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.
Ora, para $n \geq 1$, tem-se:
$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = 1 \in \,]0,+\infty[$.

Visto que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ é divergente , concluimos que o mesmo se passa com $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ e, portanto, com $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Logo, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ não é absolutamente convergente, embora seja convergente.

Sendo assim, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ é simplesmente convergente.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2-1}$.
Ora,
$\left(\frac{1}{2n^2-1}\right)$ é decrescente e $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2n^2-1} = 0$.
Logo, pelo Critério de Leibniz,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2-1} \text{ é convergente.}$$

Consideremos a série dos módulos:
$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2n^2-1}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n^2-1}$.
Ora,
$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\frac{1}{2n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n^2}{2n^2-1} = \frac{1}{2} \in \,]0,+\infty[$.

Visto que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ é convergente , concluimos que o mesmo se passa com $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n^2-1}$.

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2-1}$ é absolutamente convergente.

II. Séries de Potências.

Definição.

Sejam $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ números reais.

Uma série da forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ diz-se **uma série de potências** de x com **coeficientes** $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Tem-se o seguinte resultado importante:

Teorema. Sejam $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ uma série de potências de x e $R \in [0, +\infty]$ definido por:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Então:

a) A série é **absolutamente convergente** no intervalo $]-R, R[$.

b) A série é **divergente** em $]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$.

c) Para $x = -R$ ou $x = R$, quando $R \in]0, +\infty[$, nada se pode concluir, à partida, relativamente à convergência ou divergência da série (é preciso analisar caso a caso).

R diz-se o **raio de convergência** da série de potências e ao subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a série é convergente dá-se o nome de **domínio** ou **intervalo de convergência** da série.

Observação.

1) Se $R = 0$, a série de potências apenas converge no ponto $x = 0$.

2) Se $R = +\infty$, a série de potências converge em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

3) Se existir, em $[0, +\infty]$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, tem-se:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} .$$

4) Se existir, em $[0, +\infty]$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, tem-se:

$$R = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} .$$

Alguns Exemplos de Desenvolvimentos de Funções em Séries de Potências (trata-se de desenvolvimentos em Série de Maclaurin).

$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$, com intervalo de convergência igual a $\mathbb{R}$.

$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$, com intervalo de convergência igual a $\mathbb{R}$.

$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$, com intervalo de convergência igual a $\mathbb{R}$.

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ fixo:
$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1+\alpha+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+ \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$, para $x \in \left]-1,1\right[$.

$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$, com intervalo de convergência igual a $\left]-1,1\right]$.

Vejamos alguns exercícios:

1)

e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} (x+1)^n$.

Ora,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} (x+1)^n \underset{y=x+1}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} y^n$$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}} = \left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n+2}{n+1}\right) =$$

$$= \left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\sqrt{1}\right)(1) = 1 .$$

O raio de convergência é:

$$R = 1 .$$

Ora,

$-1 < y < 1 \Longleftrightarrow -1 < x+1 < 1 \Longleftrightarrow -2 < x < 0$.

Sendo assim:

A série é absolutamente convergente no intervalo $]-2,0[$ e é divergente em $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$.

Para $x=-2$:

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}(x+1)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}(-1)^n$.

Seja f:$[1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1} \ .$$

Tem-se:

$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)-\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} =$
$= \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \leq 0$.

Logo,

$\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)$ é decrescente, para $n \geq 1$.

Por outro lado,

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{\frac{n}{(n+1)^2}} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{\frac{n}{n^2+2n+1}} = \sqrt{0} = 0$.

Sendo assim, pelo Critério de Leibniz:

A série é convergente para $x=-2$ (podemos desprezar o termo de ordem 0 ou qualquer número finito de termos de uma série sem alterar a sua natureza).

Vejamos se a convergência, nesse ponto, é absoluta; isto é, se $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{\sqrt{n}}{n+1}(-1)^n\right|$ é convergente:

Ora, para $n \geq 1$:

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \in]0,+\infty[$.

Logo. as séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ têm a mesma natureza.

Mas, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ é divergente (é uma série de Dirichlet com $\alpha \leq 1$).

Sendo assim, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ é divergente e, portanto, também $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ o é.

A série é simplesmente convergente no ponto $x=-2$ (é convergente mas não é absolutamente convergente).

Para $x=0$:

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}(x+1)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ que já vimos que é divergente.

O intervalo de convergência da série é $[-2,0[$.

k) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(5x+1)^n}{n^2+1}$.

Ora,

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(5x+1)^n}{n^2+1} \underset{y=5x+1}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} y^n$

$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{(n+1)^2+1}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^2+2n+2}{n^2+1} = 1$.

O raio de convergência é:

$$R = 1 \ .$$

Ora,

$-1 < y < 1 \Longleftrightarrow -1 < 5x+1 < 1 \Longleftrightarrow -\frac{2}{5} < x < 0$.

Sendo assim:

A série é absolutamente convergente no intervalo $\left]-\frac{2}{5}, 0\right[$ e é divergente em $]-\infty, -2[\, \cup \,]0, +\infty[$.

Para $x = -\frac{2}{5}$:

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(5x+1)^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} (-1)^n$.

Tem-se:

$\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1} = \frac{n^2+2n+2-n^2-1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} = \frac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} \geq 0$.

Logo,

$\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ é decrescente.

Por outro lado,

$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$.

Sendo assim, pelo Critério de Leibniz:

A série é convergente para $x = -\frac{2}{5}$.

Vejamos se a convergência, nesse ponto, é absoluta; isto é, se $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{1}{n^2+1} (-1)^n\right|$ é convergente:

Ora, para $n \geq 1$:

$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \in \,]0, +\infty[$.

Logo. as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ têm a mesma natureza.

Mas, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente (é uma série de Dirichlet com $\alpha > 1$).

Sendo assim, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ é convergente e, portanto, também $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ o é.

A série é absolutamente convergente no ponto $x = -\frac{2}{5}$.

Para $x = 0$:

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(5x+1)^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ que já vimos que é convergente.

A série é absolutamente convergente no ponto $x = 0$.

O intervalo de convergência da série é $\left[-\frac{2}{5}, 0\right]$.