CDI-I

1^a Ficha-2^a Aula Prática

0. Desigualdades e Módulos

3.

3.7 $|2x-9| < |1-8x| \iff |2x-9|^2 < |1-8x|^2 \iff$
$\iff (2x-9)^2 < (1-8x)^2 \iff 4x^2 - 36x + 81 < 1 - 16x + 64x^2 \iff$
$\iff 0 < 60x^2 + 20x - 80 \iff 0 < 3x^2 + x - 4$.
Ora,
$3x^2 + x - 4 = 0 \iff x = \frac{-1-\sqrt{1+48}}{6} \vee x = \frac{-1+\sqrt{1+48}}{6} \iff$
$\iff x = \frac{-1-7}{6} \vee x = \frac{-1+7}{6} \iff x = -\frac{4}{3} \vee x = 1$.
Sendo assim,
$0 < 3x^2 + x - 4 \iff x \in \left]-\infty, -\frac{4}{3}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$.
Logo,

$$\{x \in \mathbb{R} : \ |2x-9| < |1-8x|\} = \left]-\infty, -\frac{4}{3}\right[\cup \left]1, +\infty\right[.$$

4.

4.20 $\left|1 + 4x - 3x^2\right| > 1 \iff 1 + 4x - 3x^2 < -1 \vee 1 + 4x - 3x^2 > 1 \iff$
$\iff -3x^2 + 4x + 2 < 0 \vee -3x^2 + 4x > 0$.
Ora,
$-3x^2 + 4x + 2 = 0 \iff x = \frac{-4-\sqrt{16+24}}{-6} \vee x = \frac{-4+\sqrt{16+24}}{-6} \iff$
$\iff x = \frac{-4-2\sqrt{10}}{-6} \vee x = \frac{-4+2\sqrt{10}}{-6} \iff x = \frac{2+\sqrt{10}}{3} \vee x = x = \frac{2-\sqrt{10}}{3}$.
$-3x^2 + 4x = 0 \iff x(-3x+4) = 0 \iff x = 0 \vee x = \frac{4}{3}$.
Sendo assim,
$-3x^2+4x+2 < 0 \vee -3x^2+4x > 0 \iff x \in \left]-\infty, \frac{2-\sqrt{10}}{3}\right[\cup \left]\frac{2+\sqrt{10}}{3}, +\infty\right[\cup \left]0, \frac{4}{3}\right[$
.
Logo,

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \quad \left|1 + 4x - 3x^2\right| > 1\right\} = \left]-\infty, \frac{2-\sqrt{10}}{3}\right[\cup \left]0, \frac{4}{3}\right[\cup \left]\frac{2+\sqrt{10}}{3}, +\infty\right[\ .$$

5.

5.7 $5x - 8 \geq 0 \iff x \geq \frac{8}{5}$.
$5x - 8 < 0 \iff x < \frac{8}{5}$.

Sendo assim,
$\left|2x^2-5x\right| \leq |5x-8| \Longleftrightarrow \left(x \geq \frac{8}{5} \wedge \left|2x^2-5x\right| \leq 5x-8\right) \vee$
$\vee \left(x < \frac{8}{5} \wedge \left|2x^2-5x\right| \leq -5x+8\right) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \left(x \geq \frac{8}{5} \wedge 5x-5x+8 \leq 2x^2 \leq 5x+5x-8\right) \vee$
$\vee \left(x < \frac{8}{5} \wedge 5x+5x-8 \leq 2x^2 \leq 5x-5x+8\right) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \left(x \geq \frac{8}{5} \wedge 8 \leq 2x^2 \leq 10x-8\right) \vee$
$\vee \left(x < \frac{8}{5} \wedge 10x-8 \leq 2x^2 \leq 8\right) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \left(x \geq \frac{8}{5} \wedge 0 \leq 2x^2-8 \wedge 2x^2-10x+8 \leq 0\right) \vee$
$\vee \left(x < \frac{8}{5} \wedge 0 \leq 2x^2-10x+8 \wedge 2x^2-8 \leq 0\right) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \left(x \geq \frac{8}{5} \wedge 0 \leq x^2-4 \wedge x^2-5x+4 \leq 0\right) \vee$
$\vee \left(x < \frac{8}{5} \wedge 0 \leq x^2-5x+4 \wedge x^2-4 \leq 0\right)$
Ora,
$x^2-5x+4=0 \Longleftrightarrow x=\frac{5-\sqrt{25-16}}{2} \vee x=\frac{5+\sqrt{25-16}}{2} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x=\frac{5-3}{2} \vee x=\frac{5+3}{2} \Longleftrightarrow x=1 \vee x=4$.
$\Longleftrightarrow x=3-2\sqrt{2} \vee x=3+2\sqrt{2}$.
$x^2-4=0 \Longleftrightarrow x^2=4 \Longleftrightarrow x=-2 \vee x=2$.
Sendo assim,
$\left(x \geq \frac{8}{5} \wedge 0 \leq x^2-4 \wedge x^2-5x+4 \leq 0\right) \vee$
$\vee \left(x < \frac{8}{5} \wedge 0 \leq x^2-5x+4 \wedge x^2-4 \leq 0\right) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \left(x \in \left[\frac{8}{5},+\infty\right[\cap (]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[) \cap [1,4]\right) \vee$
$\vee \left(x \in \left]-\infty,\frac{8}{5}\right[\cap (]-\infty,1] \cup [4,+\infty[) \cap [-2,2]\right) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x \in [2,+\infty[\cap [1,4]) \vee$
$\vee (x \in]-\infty,1] \cap [-2,2]) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x \in [2,4] \cup [-2,1]$.
Logo,

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \left|2x^2-5x\right| \leq |5x-8|\right\} = [-2,1] \cup [2,4] .$$

O estudo dos exercícios seguintes deve ser precedido da leitura do **Apêndice IV**.

I. Indução matemática

3.(b) A proposição $\forall n \in \mathbb{N} : 1+2+3+\cdots+n = \frac{(2n+1)^2}{8}$ é falsa; por exemplo, para $n=1$, tem-se:

$1+2+3+\cdots+n=1$,
$\frac{(2n+1)^2}{8}=\frac{9}{8}$.
No entanto, sendo $P(n)$ a fórmula $1+2+3+\cdots+n$, foi visto na alínea anterior que:

Se $P(n)$ for verdadeira para um número natural arbitrário n, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

Isto não invalida o método de **Indução Matemática,** visto que $P(1)$ não é verdadeira, como já vimos.

4. Sendo x um número real maior ou igual a -1, demonstremos, por **Indução Matemática,** a **Desigualdade de Bernoulli:**

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx \ .$$

$$n = 1 :$$

$(1+x)^n = 1 + x,$
$1 + nx = 1 + x.$
Logo, a **Desigualdade de Bernoulli** é verdadeira para $n = 1$.

Suponhamos que:

Hipótese de Indução (H.I.): $(1+x)^n \geq 1 + nx.$

Provemos, usando a **Hipótese de Indução,** que:

Tese de Indução: $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\,x.$

Ora,
$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \underset{\substack{\textbf{H.I.;} \\ 1+x \geq 0}}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 \underset{nx^2 \geq 0}{\geq}$
$\geq 1 + x + nx = 1 + (n+1)\,x.$

II. Símbolo de Somatório

4.(a) demonstremos, por **Indução Matemática:**

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{n}{n+1} \ .$$

$$n = 1 :$$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2},$
$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}.$
Logo, a igualdade é verdadeira para $n = 1$.

Suponhamos que:

Hipótese de Indução (H.I.): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$

Provemos, usando a **Hipótese de Indução,** que:

$$\textbf{Tese de Indução:}\ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Ora,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \tfrac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k(k+1)} + \tfrac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{\textbf{H.I.}}{=} \tfrac{n}{n+1} + \tfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \tfrac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \tfrac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \tfrac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \tfrac{n+1}{n+2}.$