CDI-I

2^a Ficha-5^a Aula Prática

I. Continuidade de Funções.

1) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} k + e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ x(2-x), & x < 0 \end{cases},$$

sendo $k \in \mathbb{R}$ uma constante.

(a) Calculemos $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$.

Ora,

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(k + e^{-\frac{1}{x}}\right) = k + \lim_{x \longrightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} \underset{\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0}{=}$$

$$= k + \lim_{y \longrightarrow 0} e^y = k + e^0 = k + 1 .$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} x(2-x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} x(2-x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(-x^2 + 2x\right) =$$

$$\underset{\text{ver o Apêndice VI}}{=} -\infty .$$

(b) Determinemos o valor de $k \in \mathbb{R}$ de forma a que f seja prolongável por continuidade ao ponto 0 .

Ora,

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \left(k + e^{-\frac{1}{x}}\right) = k + \lim_{x \longrightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \underset{\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty}{=}$$

$$= k + \lim_{y \longrightarrow -\infty} e^y = k + 0 = k .$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} x(2-x) = 0 .$$

Sendo assim, f é prolongável por continuidade ao ponto $0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) \Longleftrightarrow k = 0$.

(c) Designando por F o prolongamento por continuidade de f ao ponto 0, ter-se-á:

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x(2-x), & x < 0 \end{cases},$$

ou, de forma equivalente,

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ x(2-x), & x \leq 0 \end{cases}.$$

Calculemos o contradomínio de F, CD_F .

Ora,

F é contínua em $]0,+\infty[$, porque, neste conjunto, é a composta de duas funções contínuas.

F é contínua no ponto 0, porque é o prolongamento por continuidade de f a esse ponto.

F é contínua em $]-\infty,0[$, porque, neste conjunto, é uma função polinomial.

Logo, F é uma função contínua em todo o $\mathbb{R}$.

Por outro lado,

$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x(2-x) = -\infty$,

$x(2-x) \Longleftrightarrow x=0 \vee x=2 \Longrightarrow \forall x\in\,]-\infty,0[\, : F(x) = x(2-x) < 0$,

$F(0) = 0$.

logo, pelo Teorema de Bolzano (ver o Apêndice VII):

F assume qualquer valor do intervalo $]-\infty,0]$, quando $x\in\,]-\infty,0]$.

Para $x\in\,]0,+\infty[$, tem-se.

$-\frac{1}{x} < 0 \underset{\text{A função } g(x)=e^x \text{ é estritamente crescente}}{\Longrightarrow} 0 < e^{-\frac{1}{x}} < e^0 = 1.$

Por outro lado,

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} e^{-\frac{1}{x}} \underset{\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0}{=} e^0 = 1,$

$\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} F(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow0^+} e^{-\frac{1}{x}} \underset{\lim\limits_{x\longrightarrow0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty}{=}$

$= \lim\limits_{y\longrightarrow-\infty} e^y = 0$.

Logo, pelo Teorema de Bolzano.

F assume qualquer valor do intervalo $]0,1[$, quando $x\in\,]0,+\infty[$.

Sendo assim,

$CD_F = \,]-\infty,0]\cup]0,1[\, = \,]-\infty,1[$.

4) $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\longrightarrow\mathbb{R}$ é a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(2+\frac{k}{x}\right), & x>1 \\ 1-x^2, & x<1 \end{cases} ,$$

sendo $k\in\mathbb{R}$ uma constante.

(a) Calculemos $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)$.

Ora,

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \log\left(2+\frac{k}{x}\right) \underset{\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(2+\frac{k}{x}\right)=2}{=}$

$= \lim\limits_{y\longrightarrow2} \log y = \log 2 \approx 0,693\,15.$

$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \left(1-x^2\right) \underset{\text{ver o Apêndice VI}}{=} -\infty$.

(b) Determinemos o valor de $k \in \mathbb{R}$ de forma a que f seja prolongável por continuidade ao ponto 1 .

Ora,

$\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \log\left(2 + \frac{k}{x}\right) = \log(2+k)$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \left(1 - x^2\right) = 0.$

Logo,

f é prolongável por continuidade ao ponto 1 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \log(2+k) = 0 \Longleftrightarrow 2 + k = 1 \Longleftrightarrow k = -1.$

(c) Designando por F o prolongamento por continuidade de f ao ponto 0, ter-se-á:

$$F(x) = \begin{cases} \log\left(2 - \frac{1}{x}\right), \ x > 1 \\ 0, \ x = 1 \\ 1 - x^2, \ x < 1 \end{cases},$$

ou, de forma equivalente,

$$F(x) = \begin{cases} \log\left(2 - \frac{1}{x}\right), \ x > 1 \\ 1 - x^2, \ x \leq 1 \end{cases}.$$

Calculemos o contradomínio de F, CD_F .

Ora,

F é contínua em $]1, +\infty[$, porque, neste conjunto, é a composta de duas funções contínuas.

F é contínua no ponto 1, porque é o prolongamento por continuidade de f a esse ponto.

F é contínua em $]-\infty, 1[$, porque, neste conjunto, é uma função polinomial.

Logo, F é uma função contínua em todo o $\mathbb{R}$.

Ora,

$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \left(1 - x^2\right) = -\infty,$

$1 - x^2 = 0 \Longleftrightarrow (1-x)(1+x) = 0 \Longleftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \begin{cases} \forall x \in \left]-\infty, -1\right[: F(x) = 1 - x^2 < 0 \\ \forall x \in [-1, 1] : F(x) = 1 - x^2 \geq 0 \end{cases}.$

O máximo de $F(x) = 1 - x^2$ é obtido para $x = \frac{-1+1}{2} = 0$, sendo igual a $F(0) = 1$.

Logo, pelo Teorema de Bolzano,

F assume qualquer valor do intervalo $]-\infty, 1]$, quando $x \in \left]-\infty, 1\right]$.

Por outro lado,

$x > 1 \underset{0 < \frac{1}{x} < 1}{\Longrightarrow} 2 - 1 < 2 - \frac{1}{x} < 2 - 0 \Longleftrightarrow 1 < 2 - \frac{1}{x} < 2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \log 1 < F(x) = \log\left(2 - \frac{1}{x}\right) < \log 2 \Longleftrightarrow 0 < F(x) < \log 2,$

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \log\left(2 - \frac{1}{x}\right) = \log 2,$

$\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} F(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \log\left(2-\frac{1}{x}\right) = \log 1 = 0.$

Logo, pelo teorema de Bolzano,

F assume qualquer valor do intervalo $]0,\log 2[$, quando $x \in]1,+\infty[$.

Sendo assim,

$CD_F =]-\infty,1] \cup]0,\log 2[\underset{\log 2\approx 0{,}693\,15}{=}]-\infty,1]$.

6) $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi x}{2(1+x)}\right), \ x>0 \\ (x+1)^2 - k, \ x<0 \end{cases},$$

sendo $k\in\mathbb{R}$ uma constante.

(a) Calculemos $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)$.

Ora,

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \tan\left(\frac{\pi x}{2(1+x)}\right) \underset{\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\pi x}{2(1+x)} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\pi}{\frac{2}{x}+2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-}{=}$

$= \lim\limits_{y\longrightarrow\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan y = +\infty.$

$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \left((x+1)^2 - k\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \left(x^2+2x+1-k\right) = +\infty.$

(b) Determinemos o valor de $k\in\mathbb{R}$ de forma a que f seja prolongável por continuidade ao ponto 0 .

Ora,

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \tan\left(\frac{\pi x}{2(1+x)}\right) = \tan 0 = 0.$

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \left((x+1)^2 - k\right) = 1-k.$

Logo,

f é prolongável por continuidade ao ponto $0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 0 = 1-k \Longleftrightarrow k = 1.$

(c) Designando por F o prolongamento por continuidade de f ao ponto 0,

ter-se-á:

$$F(x) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi x}{2(1+x)}\right), \ x>0 \\ 0, \ x=0 \\ (x+1)^2 - 1, \ x<0 \end{cases},$$

ou, de forma equivalente,

$$F(x) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi x}{2(1+x)}\right), \ x>0 \\ (x+1)^2 - 1, \ x\le 0 \end{cases}.$$

Calculemos o contradomínio de F, CD_F .

Ora,

F é contínua em $]0,+\infty[$, porque, neste conjunto, é a composta de duas funções contínuas.

F é contínua no ponto 0, porque é o prolongamento por continuidade de f a esse ponto.

F é contínua em $]-\infty,0[$, porque, neste conjunto, é uma função polinomial.

Logo, F é uma função contínua em todo o $\mathbb{R}$.

Ora,

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} F(x) = \lim_{x\longrightarrow-\infty}\left((x+1)^2-1\right) = \lim_{x\longrightarrow-\infty}\left(x^2+2x\right) = +\infty,$$

$F(x) = (x+1)^2 - 1 \geq -1$,

$F(-1) = -1$.

Logo, pelo Teorema de Bolzano:

F assume qualquer valor do intervalo $[-1,+\infty[$, quando $x \in\,]-\infty,0]$.

Por outro lado,

$x > 0 \Longrightarrow 0 < \frac{\pi x}{2(1+x)} < \frac{\pi x}{2x} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \tan 0 < F(x) = \tan\left(\tfrac{\pi x}{2(1+x)}\right) < \lim_{y\longrightarrow\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan y \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 0 < F(x) < +\infty,$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} F(x) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \tan\left(\tfrac{\pi x}{2(1+x)}\right) = \tan 0 = 0.$$

Logo, pelo Teorema de Bolzano:

F assume qualquer valor do intervalo $]0,+\infty[$, quando $x \in\,]0,+\infty[$.

Sendo assim,

$CD_F = [-1,+\infty[\,\cup\,]0,+\infty[\, = [-1,+\infty[$.

II. Axioma do Supremo.

Convém ler, primeiro, o Apêndice VIII.

6) Sejam A e B dois subconjuntos limitados e não-vazios de $\mathbb{R}$ tais que

$$\inf A < \sup B.$$

Provemos que

$$\exists a \in A\ \exists b \in B : a < b$$

Mostremos, primeiro, por redução ao absurdo, que

$$\exists b \in B : \inf A < b.$$

Suponhamos que:
$$\sim \exists b \in B : \inf A < b.$$
Então:
$$\forall b \in B : b \leq \inf A.$$
Mas, sendo assim, $\inf A$ seria um majorante de B estritamente inferior a $\sup B$, o que contradiz a definição de supremo.

Logo,
$$\exists b \in B : \inf A < b.$$
Para $b \in B$ satisfazendo a condição $\inf A < b$, escolha-se $\varepsilon = b - \inf A > 0$.

Então (veja-se a Proposição do Apêndice VIII):
$$\exists a \in A : a < \inf A + \varepsilon = b,$$
o que conclui a demonstração.

15) Seja A um subconjunto majorado e não-vazio de $\mathbb{R}$ tal que $\sup A = 1$.

Pretende-se provar que
$$A \cap [0, 1] \neq \emptyset.$$

Seja $0 < \varepsilon < 1$.

Então, pela Proposição do Apêndice VIII:
$$\exists a \in A : 1 - \varepsilon < a \leq \sup A = 1.$$
Mas,
$$0 < 1 - \varepsilon.$$
Logo,
$$\exists a \in A : a \in [0, 1].$$
Sendo assim,
$$A \cap [0, 1] \neq \emptyset.$$

III. Propriedades Globais das Funções Contínuas.

1) seja $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que
$$\forall x \in [0, 1] : 0 \leq f(x) \leq 1 \ .$$
Pretede-se provar que
$$\exists c \in [0, 1] : f(c) = c \ (c \text{ diz-se um } \textbf{PONTO FIXO} \text{ de } f).$$
Considere-se a função $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$g(x) = f(x) - x \ .$$

Ora,
g é uma função **contínua** (porque é a diferença de duas funções contínuas)**,**
$[0,1]$ é um **intervalo,**
$g(0) = f(0) \geq 0$,
$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$.
Logo, pelo Teorema de Bolzano:

$$\exists c \in [0,1] : g(c) = 0,$$

o que é equivalente a

$$\exists c \in [0,1] : f(c) = c.$$

8) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) &= b \in \mathbb{R}, \\ \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) &= a \in \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

(a) Pretende-se provar que f é limitada.
Fixemos um $\varepsilon > 0$.
Então:
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = b \Longrightarrow \exists M > 0 \forall x \in]M, +\infty[: b - \varepsilon \leq f(x) \leq b + \varepsilon$,
$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = a \Longrightarrow \exists m < 0 \forall x \in]-\infty, m[: a - \varepsilon \leq f(x) \leq a + \varepsilon$.
Ora,
f é **contínua** no **intervalo limitado e fechado** $[m, M]$; logo, pelo Teorema de Weierstrass (ver o Apêndice IX), existem $l, L \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{aligned} l &= \min_{x \in [m,M]} f(x), \\ L &= \max_{x \in [m,M]} f(x). \end{aligned}$$

Sejam

$$\begin{aligned} l^* &= \min\{a - \varepsilon, b - \varepsilon, l\}, \\ L^* &= \max\{a + \varepsilon, b + \varepsilon, L\}. \end{aligned}$$

É claro que:

$$\forall x \in \mathbb{R} : l^* \leq f(x) \leq L^*.$$

Logo,

$$f \text{ é limitada.}$$

(b) Pretende-se provar que

$$\exists c \in \mathbb{R} : f(c) = c\ .$$

Considere-se a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - x \ .$$

Ora,

g é **contínua,** porque é a diferença de duas funções contínuas,

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - (+\infty) = b - (+\infty) = -\infty,$

$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) - (-\infty) = a - (-\infty) = +\infty \ .$

Sendo assim, pelo Teorema de Bolzano:

$$\exists c \in \mathbb{R} : g(c) = 0 \ ,$$

o que é equivalente a:

$$\exists c \in \mathbb{R} : f(c) = c \ .$$

(c) Supondo que $ab < 0$, calculemos o máximo da função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{1}{1 + (f(x))^2} \ .$$

Ora,

$$\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = \frac{1}{1 + (f(x))^2} \leq 1 \ .$$

Por outro lado,

$$ab < 0 \underset{\text{Teorema de Bolzano}}{\Longrightarrow} \exists d \in \mathbb{R} : f(d) = 0.$$

Sendo assim, para um tal d :

$$g(d) = \frac{1}{1 + (f(d))^2} = 1 \ .$$

Logo,

$$\max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 1 \ .$$