CDI-I

2^a Ficha-7^a Aula Prática

V. Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy. Extremos.

2)

(a) $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (\log x)^{x-1} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} e^{(x-1)\log(\log x)}$.

Ora,

$\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \left((x-1)\log(\log x)\right) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \frac{\log(\log x)}{\frac{1}{x-1}} \underset{\text{Regra de Cauchy}}{=}$

$= \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \frac{\frac{\frac{1}{x}}{\log x}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = -\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2}{x \log x} = \left(\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x-1}{x}\right)\left(\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x-1}{\log x}\right)$.

Mas,

$\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x-1}{\log x} \underset{\text{Regra de Cauchy}}{=} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1.$

Logo,

$\left(\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x-1}{x}\right)\left(\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x-1}{\log x}\right) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x-1}{x} = 0.$

Sendo assim,

$\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} e^{(x-1)\log(\log x)} = \lim\limits_{y \longrightarrow 0} e^0 = 1$.

(t) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x-1} \cdot \log x} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^{\frac{\log x}{x-1}}$.

Ora,

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\log x}{x-1} \underset{\text{Regra de Cauchy}}{=} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Logo,

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^{\frac{\log x}{x-1}} = \lim\limits_{y \longrightarrow 0} e^y = e^0 = 1$.

Neste momento, convém ler o Apêndice XII, antes do início da resolução do exercício **6).(a).**

6)

(a) Pretende-se provar que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |\sin x - \sin y| \leq |x - y| \ .$$

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrários.

Se $x = y$, a desigualdade assume a forma trivial:

$$0 \leq 0 \ .$$

Supondo que $x \neq y$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $x < y$.
Considere-se, então, a função $g : [x, y] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \sin t,$$

que é contínua em $[x, y]$ e diferenciável em $]x, y[$.
Logo, pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in]x, y[$ tal que

$$g(x) - g(y) = g'(c)(x - y) \ ,$$

Isto é,

$$\sin x - \sin y = (\cos c)(x - y) \ .$$

Aplicando o módulo, obtém-se

$$|\sin x - \sin y| = |(\cos c)(x - y)| = |\cos c|\,|x - y| \underset{|\cos c| \leq 1}{\leq} |x - y| \ .$$

10) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log\left(1+x^2\right)}{x}, \ x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$$

(a) Provemos que f é contínua no ponto 0 e calculemos $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$.
Ora,
$f(0) = 0$,
$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\log\left(1+x^2\right)}{x} \underset{\text{Regra de Cauchy}}{=} \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = \frac{0}{1} = 0 = f(0)$.
Logo, f é contínua no ponto 0 .
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\log\left(1+x^2\right)}{x} \underset{\text{Regra de Cauchy}}{=} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2x}{1+x^2} =$

$\underset{\text{Regra de Cauchy}}{=} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2}{2x} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \frac{\log\left(1+x^2\right)}{x} \underset{\text{Regra de Cauchy}}{=} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2x}{1+x^2} =$

$\underset{\text{Regra de Cauchy}}{=} \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2}{2x} \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

(b) Pretende-se mostrar que f é diferenciável no ponto 0 e que $f'(0) = 1$.
Ora,
$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\log\left(1+x^2\right)}{x^2} =$

$\underset{\text{Regra de Cauchy}}{=} \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$.

Logo,

$$f \text{ é diferenciável no ponto } 0 \wedge f'(0) = 1.$$

(c) Vamos provar que é verdadeira a proposição

$$f'(x) = 0 \text{ tem, pelo menos duas soluções distintas em } \mathbb{R}.$$

Já vimos que f é diferenciável no ponto 0.

Mas, para $x \neq 0$, f também é diferenciável, porque é o quociente de duas funções diferenciáveis.

Sendo assim, f é diferenciável em todo o $\mathbb{R}$.

Ora, f é uma função ímpar; logo, f' é uma função par, visto que.

$f(x) = -f(-x) \underset{\text{usando a Regra de Derivação da Função Composts}}{\Longrightarrow} f'(x) = -f'(-x)(-1) \Longleftrightarrow f'(x) = f'(-x)$.

Por outro lado,

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0,$

$f(0) = 0,$

$\forall x \in \mathbb{R}^+ : f(x) > 0.$

Logo, pelo Teorema de Bolzano:

$$\exists a, b \in \mathbb{R}^+ : a < b \wedge f(a) = f(b) \ .$$

Aplicando o Teorema de Rolle, concluimos que, para tais elementos a, b:

$$\exists c \in]a, b[: f'(c) = 0 \ .$$

Sendo assim, visto que f'é par, conclui-se, para um tal c, que também se tem

$$f'(-c) = 0 \ .$$