CDI-I

3^a Ficha (partes 1 e 2) - 10^a Aula prática

II. Funções Trigonométricas e Hiperbólicas Inversas.

21) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por

$$f(x) = x + 2\arctan\frac{1}{x} \ .$$

Domínio e simetria de f :
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : f(-x) = -f(x)$.
Logo,
f é uma função ímpar (sendo assim, o gráfico de f é simétrico em relação à origem).

Limites no infinito e na origem:
$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \left(x + 2\arctan\frac{1}{x}\right) \underset{\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty}\left(2\arctan\frac{1}{x}\right)=0}{=} -\infty$.
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) \underset{f \text{ é uma função ímpar}}{=} +\infty$.
$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \left(x + 2\arctan\frac{1}{x}\right) \underset{\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-}\left(2\arctan\frac{1}{x}\right)=-\pi}{=} -\pi$.
$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) \underset{f \text{ é uma função ímpar}}{=} \pi$.

Assímptotas verticais de f :
A função definida por $g(x) = x$ é contínua em $\mathbb{R}$ e a função definida por $h(x) = 2\arctan\frac{1}{x}$ é limitada em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Logo,
f não tem assímptotas verticais.

Assímptotas não-verticais de f :

Se existirem, as assímptotas não-verticais admitem uma equação da forma $y = mx + b$, sendo:

$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} (f(x) - mx) \end{cases} \vee \begin{cases} m = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} (f(x) - mx) \end{cases} .$$

Ora,

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x+2\arctan\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \left(1 + 2\frac{\arctan\frac{1}{x}}{x}\right) =$$

$$\underset{\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\arctan\frac{1}{x}}{x}=0}{=} 1 = m,$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \left(2\arctan\tfrac{1}{x}\right) =$$

$= 0 = b.$

Logo, f tem uma assímptota não-vertical, quando $x \longrightarrow +\infty$, de equação:

$$y = x .$$

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x+2\arctan\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \left(1 + 2\frac{\arctan\frac{1}{x}}{x}\right) =$$

$$\underset{\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \frac{\arctan\frac{1}{x}}{x}=0}{=} 1 = m,$$

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow-\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \left(2\arctan\tfrac{1}{x}\right) =$$

$= 0 = b.$

Logo, f tem uma assímptota não-vertical, quando $x \longrightarrow -\infty$, de equação:

$$y = x .$$

Note-se, ainda que

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \left(2\arctan\tfrac{1}{x}\right) = 0^- .$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \left(2\arctan\tfrac{1}{x}\right) = 0^+ .$$

Intervalos de monotonia, extremos e pontos de inflexão:

Ora, para $x \in \mathbb{R}\diagdown\{0\}$:

$$f'(x) = \left(x + 2\arctan\tfrac{1}{x}\right)' = 1 + 2\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}.$$

$$f''(x) = \left(1 - \frac{2}{1+x^2}\right)' = -2.\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2} .$$

Ora,

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 - \frac{2}{1+x^2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{2}{1+x^2} = 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 1 + x^2 = 2 \Longleftrightarrow x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = -1 \vee x = 1 .$$

Temos a seguinte tabela:

		-1		0		1	
$f'(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$	$+$	0	$-$	não definida	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$1-\frac{\pi}{2}$ (máximo local)	$\searrow$	não definida	$\searrow$	$1+\frac{\pi}{2}$ (mínimo local)	$\nearrow$

Relembre-se que:

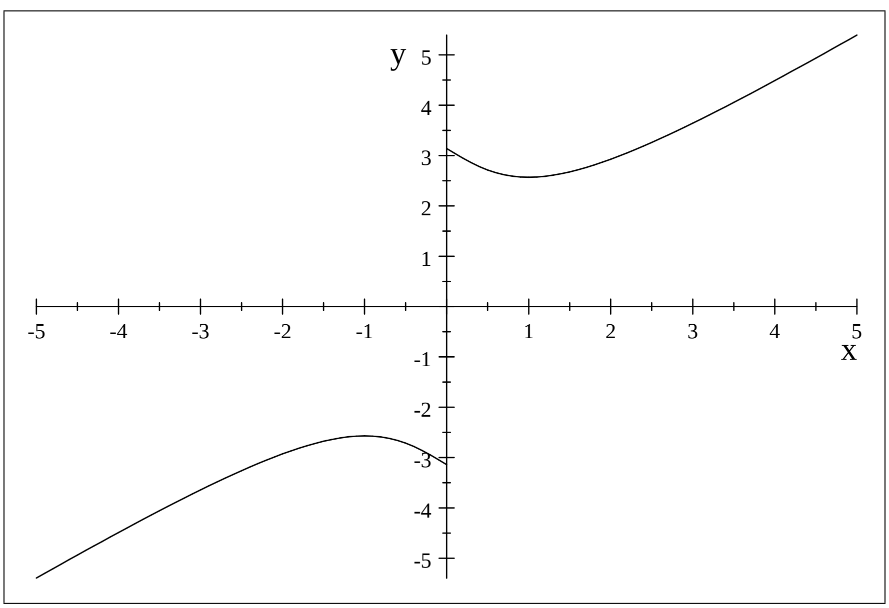
$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) &= -\pi \ , \\
\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) &= \pi \ , \\
\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) &= -\infty \ , \\
\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \ .
\end{aligned}$$

Por outro lado,
$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{4x}{(1+x^2)^2} = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
Mas, $x = 0$ não pertence a D_f .
Logo, o gráfico de f não tem pontos de inflexão.

Temos, a seguinte tabela:

		0	
$f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$	$-$	não definida	$+$
$f(x)$	$\cap$	não definida	$\cup$

Gráfico de f:
$x + 2\arctan\frac{1}{x}$



3^a Ficha (parte 2)

II. Primitivas Quase-Imediatas.

1) Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}\diagdown\{-1\}$, uma **primitiva** de $u^\alpha.u'$ é

$$\int u^\alpha.u'dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ .$$

Sendo assim,
$\int \frac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}dx = \int (1-2x)^{-\frac{1}{5}}\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-2x)^{-\frac{1}{5}}\,(-2)\,dx =$
$= -\frac{1}{2}\frac{(1-2x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} = -\frac{5}{8}\sqrt[5]{(1-2x)^4}$.
$\frac{d\left(-\frac{5}{8}\sqrt[5]{(1-2x)^4}\right)}{dx} = -\frac{\sqrt[5]{(2x-1)^4}}{2x-1}$.

16) Tem-se**:**

$$\int u'\cos u\,dx = \sin u \ ,$$

$$\int u'\sin u\,dx = -\cos u \ .$$

Logo,
$\int x^2\cos\left(x^3-1\right)dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\cos\left(x^3-1\right)dx = \frac{1}{3}\sin\left(x^3-1\right)$.

31) Relembre-se que uma **primitiva** de $\frac{u'}{u}$ é

$$\int \frac{u'}{u}dx = \log|x| \ .$$

Sendo assim,
$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\log\left|1+x^2\right| = \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) = \log\sqrt{1+x^2}$.

48) De $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ deduz-se, dividindo ambos os membros desta igualdade por $\sin^2 x$:

$$1+\tan^2 x = \sec^2 x \ ,$$

sendo $\sec x = \frac{1}{\cos x}$.
Por outro lado,

$$(\tan u)' = u'\sec^2 u \ ,$$

em particular,

$$(\tan x)' = \sec^2 x \ ,$$

Sendo assim,

$$\int \tan^3 x\, dx = \int \tan x . \tan^2 x\, dx = \int \tan x . \left(\sec^2 x - 1\right)\, dx =$$

$$= \int \tan x . \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx = \int \tan x . \sec^2 x\, dx + \int \tfrac{-\sin x}{\cos x}\, dx =$$

$$= \tfrac{\tan^2 x}{2} + \log|\cos x|\ .$$

55) Tem-se:

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin u\ ,$$

$$\int \left(-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\right) dx = \arccos u\ ,$$

em particular,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x\ ,\ ,$$

$$\int \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \arccos x\ ,\ ,$$

Sendo assim,

$$\int \tfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int \tfrac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} dx = \arcsin e^x .$$