CDI-I

3^a Ficha (parte 2) - 11^a e 12^a Aulas Práticas

III. Primitivas de Funções Racionais.

1) $\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \Longleftrightarrow 1 = A(x-2) + B(x+1) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 1 = (A+B)x - 2A + B \Longleftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A+B=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ 3B=1 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\begin{cases} A=-\frac{1}{3} \\ B=\frac{1}{3} \end{cases}$.

Logo,

$\int \frac{1}{(x+1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} \right) dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-2} dx =$

$= -\frac{1}{3} \log|x+1| + \frac{1}{3} \log|x-2| = \frac{1}{3} \log \frac{|x-2|}{|x+1|} = \log \sqrt[3]{\left| \frac{x-2}{x+1} \right|}$.

3) $\frac{x^4}{1-x} = \frac{-x^4}{x-1}$.

$\frac{-x^4}{x-1}$ é uma fracção racional **imprópria** (o grau do numerador é maior ou igual ao grau do denominador).

Usemos a Regra de Ruffini para dividirmos $-x^4$ por $x-1$, obtendo um polinómio e uma fracção racional **própria** (o grau do numerador é menor que o grau do denominador):

	-1	0	0	0	0
1		-1	-1	-1	-1
	-1	-1	-1	-1	-1

Sendo assim,

$-x^4 = (x-1)\left(-x^3 - x^2 - x - 1\right) - 1$.

Logo,

$\frac{-x^4}{x-1} = -x^3 - x^2 - x - 1 - \frac{1}{x-1}$,

$\int \left(-x^3 - x^2 - x - 1 - \frac{1}{x-1} \right) dx = -\int x^3 dx - \int x^2 dx - \int x dx - \int 1 dx - \int \frac{1}{x-1} dx =$

$= -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - \log|x-1|$.

5) $x^2 + x + 1$ não tem raízes reais.

Escrevamos $x^2 + x + 1$ na forma $(x-p)^2 + q^2$:

$x^2 + x + 1 = x^2 + 2x\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} =$

$= \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

Logo,

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int \frac{\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{1+\left(\frac{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right).$$

8) $\frac{2x}{(x^2-1)(x+1)} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow 2x = A(x+1)^2 + B_1(x-1)(x+1) + B_2(x-1) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 2x = A\left(x^2+2x+1\right) + B_1\left(x^2-1\right) + B_2(x-1) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 2x = (A+B_1)x^2 + (2A+B_2)x + A - B_1 - B_2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A+B_1=0 \\ 2A+B_2=2 \\ A-B_1-B_2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=-B_1 \\ -2B_1+B_2=2 \\ -2B_1-B_2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A=-B_1 \\ B_2=2+2B_1 \\ -2B_1-2-2B_1=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=-B_1 \\ B_2=2+2B_1 \\ -4B_1=2 \end{cases} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B_1=-\frac{1}{2} \\ B_2=1 \end{cases}.$$

Logo,

$$\int \frac{2x}{(x^2-1)(x+1)}dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{1}{(x+1)^2}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+1| + \int (x+1)^{-2}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{|x-1|}{|x+1|} + \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \log\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} - \frac{1}{x+1}.$$

20) $\frac{1+x}{1-x^4} = \frac{-1-x}{x^4-1} = \frac{-1-x}{(x^2-1)(x^2+1)} =$

$$= \frac{-1-x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow -1-x = A(x+1)\left(x^2+1\right) + B(x-1)\left(x^2+1\right) + (Cx+D)\left(x^2-1\right) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow -1-x = A\left(x^3+x^2+x+1\right) + B\left(x^3-x^2+x-1\right) + \left(Cx^3+Dx^2-Cx-D\right) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow -x-1 = (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + A-B-D \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=-1 \\ A-B-D=-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=-B-C \\ -B-C-B+D=0 \\ -B-C+B-C=-1 \\ -B-C-B-D=-1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A=-B-C \\ -2B-C+D=0 \\ -2C=-1 \\ -2B-C-D=-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=-B-\frac{1}{2} \\ -2B+D=\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \\ -2B-D=-\frac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A=-B-\frac{1}{2} \\ -2B+D=\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \\ 2D=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=0 \\ C=\frac{1}{2} \\ D=\frac{1}{2} \end{cases} .$$

Logo,

$$\int \frac{-1-x}{(x^2-1)(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{4}\log\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}\arctan x =$$

$$= \log\frac{1}{\sqrt{|x-1|}} + \frac{1}{4}\log\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}\arctan x \ .$$

IV. Primitivação por Partes.

1) Relembre-se a **Fórmula de Primitivação por Partes:**

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx \ .$$

Sendo assim,

$$\int x\sin x\,dx \underset{\substack{u'=\sin x \\ v=x}}{=} (-\cos x).x - \int (-\cos x)\,dx =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x \ .$$

10) $\int \sin^2 x\,dx = (-\cos x)\sin x - \int (-\cos x)\cos x\,dx =$

$$= -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx = -\sin x\cos x + \int \left(1-\sin^2 x\right)\,dx =$$

$$= -\sin x\cos x + \int 1\,dx - \int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + x - \int \sin^2 x\,dx \ .$$

Logo,

$$2\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + x \Longleftrightarrow \int \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{x}{2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} \ .$$

18) $\int \arctan x\,dx = \int 1.\arctan x\,dx \underset{\substack{u'=1 \\ v=\arctan x}}{=} x.\arctan x - \int x.\frac{1}{1+x^2}dx =$

$$= x.\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = x.\arctan x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) =$$

$$= x.\arctan x + \log\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ .$$

28) $\int \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \log x dx \underset{\substack{u' = x^{-\frac{1}{2}} \\ v = \log x}}{=}$

$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \log x - \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx = 2\sqrt{x} \log x - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x} \log x - 2 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} ==$
$= 2\sqrt{x} \log x - 4\sqrt{x} = 2\sqrt{x} (\log x - 2)$.

V. Primitivação por Substituição.

1) Relembre-se o esquema de **Primitivação por Substituição:**

(i) Pretende-se calcular $\int f(x)\, dx$.

(ii) Efectua-se uma mudança de variável $x = \varphi(t)$, sendo φ uma bijecção diferenciável.

(iii) Calcula-se $\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$.

(iv) Obtém-se, finalmente, $\int f(x)\, dx$, efectuando a substituição $t = \varphi^{-1}(x)$ em $\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$.

Apliquemos este esquema ao cálculo de $\int \frac{5}{2(x+1)\left(\sqrt{x}+2\right)} dx$:

Efectue-se a mudança de variável $\varphi : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$, definida por $x = \varphi(t) = t^2$.

Ora,

$\int \frac{5}{2(t^2+1)(t+2)} \varphi'(t)\, dt = \int \frac{5}{2(t^2+1)(t+2)} 2t dt = \int \frac{5t}{(t^2+1)(t+2)} dt.$

$\frac{5t}{(t^2+1)(t+2)} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \Longleftrightarrow 5t = A\left(t^2+1\right) + (Bt+C)(t+2) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow 5t = (A+B)\, t^2 + (2B+C)\, t + A + 2C \Longleftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2B+C=5 \\ A+2C=0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ 2B+C=5 \\ -B+2C=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ 2B+C=5 \\ B=2C \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ 5C=5 \\ B=2C \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=2 \\ C=1 \end{cases} .$$

Logo,

$\int \left(\frac{-2}{t+2} + \frac{2t+1}{t^2+1}\right) dt = -2\int \frac{1}{t+2} dt + \int \frac{2t}{t^2+1} dt + \int \frac{1}{t^2+1} dt =$

$= -2 \log|t+2| + \log\left(t^2+1\right) + \arctan t = \log \frac{t^2+1}{(t+2)^2} + \arctan t.$

Efectuando a substituição inversa $t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$, obtém-se:

$\int \frac{5}{2(x+1)\left(\sqrt{x}+2\right)} dx = \log \frac{x+1}{\left(\sqrt{x}+2\right)^2} + \arctan \sqrt{x}$.

14) $\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(1+e^x)}dx = ?$

Efectue-se a substituição $\varphi :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $x = \varphi(t) = \log t$.

Tem-se:

$$\int \frac{e^{2\log t}}{(e^{2\log t}-1)(1+e^{\log t})}\varphi'(t)\,dt = \int \frac{\left(e^{\log t}\right)^2}{\left((e^{\log t})^2-1\right)(1+e^{\log t})}\frac{1}{t}dt = \int \frac{t^2}{(t^2-1)(1+t)}\frac{1}{t}dt =$$

$$= \int \frac{t}{(t^2-1)(1+t)}dt \ .$$

Ora,

$$\frac{t}{(t^2-1)(1+t)} = \frac{t}{(t+1)^2(t-1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B_1}{t+1} + \frac{B_2}{(t+1)^2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow t = A(t+1)^2 + B_1\left(t^2-1\right) + B_2(t-1) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow t = A\left(t^2+2t+1\right) + B_1\left(t^2-1\right) + B_2(t-1) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow t = (A+B_1)\,t^2 + (2A+B_2)\,t + A - B_1 - B_2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A+B_1=0 \\ 2A+B_2=1 \\ A-B_1-B_2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=-B_1 \\ -2B_1+B_2=1 \\ -2B_1-B_2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A=-B_1 \\ -4B_1=1 \\ -2B_1-B_2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B_1=-\frac{1}{4} \\ B_2=\frac{1}{2} \end{cases} .$$

Logo,

$$\int \frac{t}{(t^2-1)(1+t)}dt = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{t+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(t+1)^2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t-1}dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+1}dt + \frac{1}{2}\int (t+1)^{-2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\log|t-1| - \frac{1}{4}\log|t+1| + \frac{1}{2}\frac{(t+1)^{-1}}{-1} =$$

$$= \log\sqrt[4]{\left|\frac{t-1}{t+1}\right|} - \frac{1}{2(t+1)} \ .$$

Considerando a substituição inversa $t = \varphi^{-1}(x) = e^x$, obtém-se:

$$\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(1+e^x)}dx = \log\sqrt[4]{\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|} - \frac{1}{2(e^x+1)} \ .$$

27) $\int \frac{1}{\cos x}dx = ?$

Efectue-se a substituição $\varphi :]-1,1[\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, definida por $x = \varphi(t) = \arcsin t$.

Tem-se:

$$\int \frac{1}{\cos(\arcsin t)}\varphi'(t)\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin t)}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dx = \int \frac{1}{1-t^2}dx \ .$$

Ora,

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{-1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \Longleftrightarrow -1 = A(t+1) + B(t-1) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow -1 = (A+B)\,t + A - B \Longleftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases} .$$

Logo,

$$\int \left(\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}\right) dt = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{t-1}+\frac{\frac{1}{2}}{t+1}\right) dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1} dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1} dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\log|t-1| + \frac{1}{2}\log|t+1| = \log\sqrt{\left|\frac{t+1}{t-1}\right|} .$$

Efectuando a substituição inversa $t=\varphi^{-1}(x)=\sin x$, obtém-se:

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \log\sqrt{\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|} = \log\sqrt{-\frac{\sin x+1}{\sin x-1}} .$$

28) $\int \frac{1}{\sin x} dx = ?$

Efectue-se a substituição $\varphi :]-1,1[\longrightarrow]0,\pi[$, definida por $x=\varphi(t)=\arccos t$

.

Tem-se:

$$\int \frac{1}{\sin(\arccos t)}\varphi'(t)\, dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos t)}}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) dt =$$

$$= \int \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dx = \int \frac{-1}{1-t^2} dx .$$

Ora, usando a decomposição feita no exercício anterior:

$\frac{-1}{1-t^2} = \frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{t+1}$.

Logo,

$$\int \frac{-1}{1-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}\, dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\, dt = \frac{1}{2}\log|t-1| - \frac{1}{2}\log|t+1| =$$

$$= \log\sqrt{\left|\frac{t-1}{t+1}\right|} .$$

Efectuando a substituição inversa $t=\varphi^{-1}(x)=\cos x$, obtém-se:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \log\sqrt{\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|} = \log\sqrt{-\frac{\cos x-1}{\cos x+1}} .$$

43) $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\, dx = ?$

Efectue-se a substituição $\varphi : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $x=\varphi(t)=\tan t$.

Tem-se:

$$\int \frac{1}{\tan t\sqrt{1+\tan^2 t}}\varphi'(t)\, dt \underset{1+\tan^2 t=\sec^2 t}{=} \int \frac{1}{\tan t \sec t}\sec^2 t\, dt =$$

$$= \int \frac{\sec t}{\tan t}\, dt = \int \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin t}{\cos t}} dt = \int \frac{1}{\sin t} dt = \log\sqrt{\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right|} =$$

$$= \log\sqrt{\left|\frac{1-\frac{1}{\cos t}}{1+\frac{1}{\cos t}}\right|} = \log\sqrt{\left|\frac{1-\sec t}{1+\sec t}\right|} = \log\sqrt{\left|\frac{1-\sqrt{1+\tan^2 t}}{1+\sqrt{1+\tan^2 t}}\right|} .$$

Efectuando a substituição inversa $t=\varphi^{-1}(x)=\arctan x$, obtém-se:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\, dx = \log\sqrt{\left|\frac{1-\sqrt{1+\tan^2(\arctan x)}}{1+\sqrt{1+\tan^2(\arctan x)}}\right|} = \log\sqrt{\left|\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}\right|} = \log\sqrt{-\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}}$$

.

VI. Treino Complementar de Primitivas.

20) $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = ?$

Efectue-se a substituição $\varphi :]-1,1[\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $x = \varphi(t) = \arcsin t$

.

Tem-se:

$$\int \frac{1}{\cos^3(\arcsin t)} \varphi'(t)\, dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin t)}(1-\sin^2(\arcsin t))} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}(1-t^2)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dx = \int \frac{1}{(1-t^2)^2} dx \ .$$

Ora,

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{A_1}{t-1} + \frac{A_2}{(t-1)^2} + \frac{B_1}{t+1} + \frac{B_2}{(t+1)^2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 1 = A_1(t-1)(t+1)^2 + A_2(t+1)^2 + B_1(t-1)^2(t+1) + B_2(t-1)^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 1 = A_1\left(t^3+t^2-t-1\right) + A_2\left(t^2+2t+1\right) + B_1\left(t^3-t^2-t+1\right) + B_2\left(t^2-2t+1\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 1 = (A_1+B_1)t^3 + (A_1+A_2-B_1+B_2)t^2 + (2A_2-A_1-B_1-2B_2)t + (A_2-A_1+B_1+B_2) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A_1+B_1=0 \\ A_1+A_2-B_1+B_2=0 \\ 2A_2-A_1-B_1-2B_2=0 \\ A_2-A_1+B_1+B_2=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A_1=-B_1 \\ A_2-2B_1+B_2=0 \\ 2A_2-2B_2=0 \\ A_2+2B_1+B_2=1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A_1=-B_1 \\ A_2=B_2 \\ -2B_1+2B_2=0 \\ 2B_1+2B_2=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A_1=-B_1 \\ A_2=B_2 \\ B_1=B_2 \\ 4B_1=1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A_1=-\frac{1}{4} \\ A_2=\frac{1}{4} \\ B_1=\frac{1}{4} \\ B_2=\frac{1}{4} \end{cases} .$$

Logo,

$$\int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{t-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(t-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{t+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(t+1)^2} \right) dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{t-1} dt + \frac{1}{4}\int (t-1)^{-2}\, dt + \int \frac{\frac{1}{4}}{t+1} dt + \frac{1}{4}\int (t+1)^{-2}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\log|t-1| + \frac{1}{4}\frac{(t-1)^{-1}}{-1} + \frac{1}{4}\log|t+1| + \frac{1}{4}\frac{(t+1)^{-1}}{-1} =$$

$$= \log \sqrt[4]{\left|\frac{t+1}{t-1}\right|} - \frac{1}{4}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{t+1} = \log \sqrt[4]{\left|\frac{t+1}{t-1}\right|} - \frac{1}{2}\frac{t}{t^2-1} \ .$$

Efectuando a substituição inversa $t = \varphi^{-1}(x) = \sin x$, obtém-se:

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \log \sqrt[4]{\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|} - \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\sin^2 x-1} = \log \sqrt[4]{-\frac{\sin x+1}{\sin x-1}} + \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} \ .$$

27) $\int \arctan(\sqrt{x})\, dx = ?$

Efectue-se a substituição $\varphi : [0,+\infty] \longrightarrow [0,+\infty]$, definida por $x = \varphi(t) = t^2$

.

Tem-se:

$$\int \arctan t.\varphi'(t)\ dt = \int \arctan t.2t\,dt \underset{\substack{u'=2t\\ v=\arctan t}}{=} =$$

$$= t^2.\arctan t - \int t^2 \tfrac{1}{1+t^2} dt = t^2.\arctan t - \int \tfrac{t^2+1-1}{1+t^2} dt =$$

$$= t^2.\arctan t - \int 1 dt + \int \tfrac{1}{1+t^2} dt = t^2.\arctan t - t + \arctan t =$$

$$= \left(t^2+1\right).\arctan t - t\ .$$

Efectuando a substituição inversa $t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$, obtém-se:

$$\int \arctan\left(\sqrt{x}\right)\ dx = (x+1).\arctan\left(\sqrt{x}\right) - \sqrt{x}\ .$$

46) $\int \frac{1}{1+\sin x} dx = ?$

Ora, para $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, tem-se:

$$\sin x = \sin\left(2\tfrac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x}{2}\right) = 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} \underset{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)=1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\ .$$

$$\cos x = \cos\left(2\tfrac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\left(1-\tan^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} \underset{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)=1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\ .$$

Logo,

$$\int \frac{1}{1+\sin x} dx = \int \frac{1}{1+\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\ dx = \int \frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\ dx\ .$$

Efectue-se a substituição $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $x = \varphi(t) = 2\arctan t$.

Tem-se:

$$\int \frac{1+\tan^2(\arctan t)}{1+\tan^2(\arctan t)+2\tan(\arctan t)}\varphi'(t)\ dt = \int \frac{1+t^2}{t^2+2t+1}\,\frac{2}{1+t^2}\ dt =$$

$$= 2\int \frac{1+t^2}{t^2+2t+1}\,\frac{2}{1+t^2}\ dt = 2\int \frac{1}{(t+1)^2}\ dt = 2\int (t+1)^{-2}\ dt =$$

$$= 2\frac{(t+1)^{-1}}{-1} = -\frac{2}{t+1}\ .$$

Efectuando a substituição inversa $t = \varphi^{-1}(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, obtém-se:

$$\int \frac{1}{1+\sin x} dx = -\frac{2}{t+1} = -\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}\ .$$

VIII. Integral Indefinido e Teorema Fundamental do Cálculo.

Relembre-se o Teorema Fundamemtal do Cálculo:

Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e integrável em qualquer intervalo limitado e fechado contido em $[a, b]$, c um ponto qualquer de $[a, b]$ e $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$F(x) = \int_c^x f(t)\ dt\ .$$

Então:

F é diferenciável em qualquer ponto $x \in [a, b]$, tendo-se:

$F'(x) = f(x)$, isto é:

$$\left(\int_c^x f(t)\ dt \right)' = f(x)\ .$$

F diz-se um **integral indefinido** de f , com origem c . É claro que F é uma primitiva de f .

1) Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que $\int_c^d f = \int_c^d g$, para quaisquer $c, d \in [a, b]$.

Provemos que:

$$\forall x \in [a, b] : f(x) = g(x)\ .$$

Ora, para qualquer $x \in [a, b]$ tem-se, por hipótese:

$$\left(\int_a^x f \right)' = \left(\int_a^d g \right)'\ .$$

Sendo assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\forall x \in [a, b] : f(x) = g(x)\ .$$

6) Mostre que os valores das seguintes expressões não dependem de x .

(a) $\int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int\limits_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt$, $x > 0$.

Ora, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pelo Teorema de Derivação da Função Composta, tem-se, para qualquer $x > 0$:

$$\left(\int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int\limits_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt\right)' = \left(\int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt\right)' + \left(\int\limits_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \ .$$

Visto que a derivada é igual a 0 , para qualquer $x > 0$, conclui-se que a expressão não depende de x .

(b) $\int\limits_{-\cos x}^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Ora, usando o Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema de Derivação da Função Composta, tem-se, para qualquer $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e sendo c um ponto fixo de$\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\left(\int\limits_{-\cos x}^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right)' = \left(\int\limits_{-\cos x}^{c} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \int\limits_{c}^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right)' =$$

$$= \left(-\int\limits_{c}^{-\cos x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \int\limits_{c}^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right)' = -\left(\int\limits_{c}^{-\cos x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right)' + \left(\int\limits_{c}^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right)' =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-(-\cos x)^2}}\,(-\cos x)' + \frac{1}{\sqrt{1-(\sin x)^2}}\,(\sin x)' = -\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} + \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} =$$

$$= -\frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\cos x} = -1 + 1 = 0 \ .$$

Visto que a derivada é igual a 0 , para qualquer $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que a expressão não depende de x .

IX. Regra de Barrow e Cálculo de Áreas.

Relembre-se a regra de Barrow:

Teorema.
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.
Então, para qualquer primitiva F de f , tem-se:

Regra de Barrow: $$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \ .$$

A Regra de Barrow é, frequentemente, escrita na forma: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$

1) Calculemos a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = e^x \ , \ y = 1 - x \text{ e } x = 1 \ .$$

Pontos de Intersecção das curvas:

$y = e^x \ , \ y = 1 - x$:
$x = 0 \Longrightarrow e^x = 1 - x = 1.$
Por outro lado:
$x < 0 \Longrightarrow 1 - x > 1 > e^x.$
$x > 0 \Longrightarrow 1 - x < 1 < e^x.$
Logo,
O único ponto de intersecção destas curvas é o ponto $(0, 1)$.

$y = e^x \ , \ x = 1$:
O único ponto de intersecção destas curvas é o ponto $(1, e)$.

$y = 1 - x$ e $x = 1$:
O único ponto de intersecção destas curvas é o ponto $(1, 0)$.
A área pretendida é:

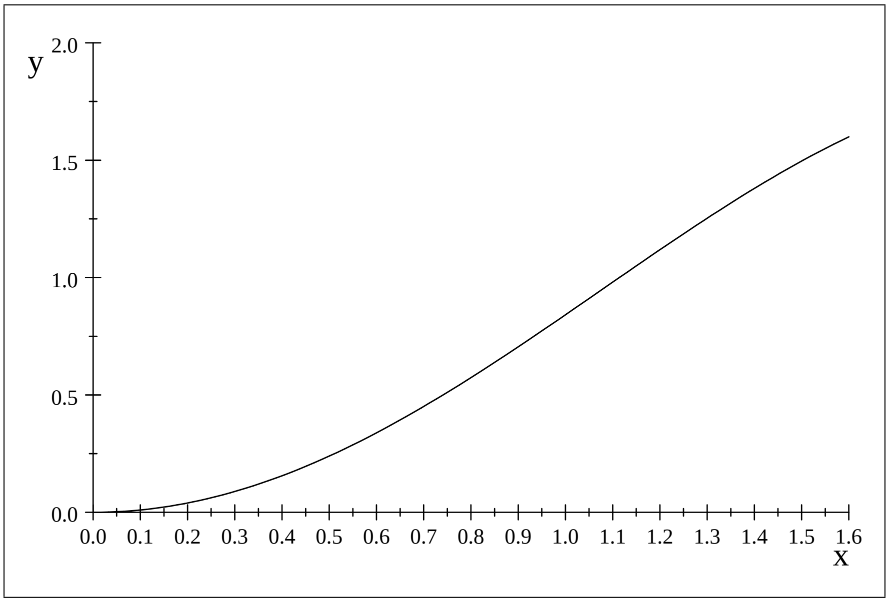
$$A = \int\limits_0^1 (e^x - (1 - x))\,dx = \int\limits_0^1 (e^x - 1 + x) \underset{\text{Regra de Barrow}}{=} \left[e^x - x + \tfrac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$
$$= e - 1 + \tfrac{1}{2} - 1 = e - 2 + \tfrac{1}{2} = e - \tfrac{3}{2} \ .$$

12) Determinemos a área do conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } 0 \leq y \leq x \sin x \ .$$

Repare-se que

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] : x \sin x > 0 \ ,$$
$$x = 0 \Longrightarrow x \sin x = 0 \ .$$



Determinemos uma primitiva de $x \sin x$:

$$F(x) = \int x \sin x \, dx \underset{\substack{u' = \sin x \\ v = x}}{=} (-\cos x).x - \int (-\cos x) \, dx =$$

$= -x \cos x + \sin x$.

Logo, a área pretendida é:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx \underset{\text{Regra de Barrow}}{=} [-x \cos x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \; .$$