CDI-I

3^a Ficha (parte 2) - 13^a Aula Prática

III. Primitivas de Funções Racionais.

16) $\int \frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x-3)}\,dx = ?$

Ora,

$\frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x^2+3x-2 = A(x+1)^2 + B_1(x-3)(x+1) + B_2(x-3) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x^2+3x-2 = (A+B_1)x^2 + (2A-2B_1+B_2)x + A - 3B_1 - 3B_2 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A+B_1 = 1 \\ 2A-2B_1+B_2 = 3 \\ A-3B_1-3B_2 = -2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = 1-B_1 \\ 2-4B_1+B_2 = 3 \\ 1-4B_1-3B_2 = -2 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A = 1-B_1 \\ -4B_1+B_2 = 1 \\ -4B_1-3B_2 = -3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = 1-B_1 \\ B_2 = 1+4B_1 \\ -4B_1-3-12B_1 = -3 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B_1 = 0 \\ B_2 = 1 \end{cases} .$$

Logo,

$\int \frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx =$

$= \int \frac{1}{x-3}\,dx + \int (x+1)^{-2}\,dx = \log|x-3| + \frac{(x+1)^{-1}}{-1} =$

$= \log|x-3| - \frac{1}{x+1}$.

24) $\int \frac{x^2+x-1}{(1+x^2)(x+3)}\,dx = ?$

Ora,

$\frac{x^2+x-1}{(1+x^2)(x+3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{1+x^2} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x^2+x-1 = A\left(1+x^2\right) + (Bx+C)(x+3) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x^2+x-1 = (A+B)x^2 + (3B+C)x + A + 3C$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A+B = 1 \\ 3B+C = 1 \\ A+3C = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = 1-B \\ 3B+C = 1 \\ 1-B+3C = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A = 1-B \\ B = 2+3C \\ C = -5-9C \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = 1-B \\ B = 2+3C \\ 10C = -5 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \\ C = -\frac{1}{2} \end{cases} .$$

Logo,

$$\int \frac{x^2+x-1}{(1+x^2)(x+3)}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x+3} + \frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{1+x^2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+3}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log|x+3| + \frac{1}{4}\log\left(1+x^2\right) - \frac{1}{2}\arctan x =$$

$$= \log\sqrt{|x+3|} + \log\sqrt[4]{1+x^2} - \frac{1}{2}\arctan x \ .$$

IX. Regra de Barrow e Cálculo de Áreas.

2) Determinemos a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = e^{-x} \ , \ y = 1+x \text{ e } x = -1 \ .$$

Calculemos os pontos de intersecção das curvas:

$y = e^{-x}$, $y = 1+x$:
$x = 0 \Longrightarrow e^{-x} = 1+x = 1$.
Por outro lado:
$x > 0 \Longrightarrow 1+x > 1 > e^{-x}$.
$x < 0 \Longrightarrow 1+x < 1 < e^{-x}$.
Logo,
O único ponto de intersecção destas curvas é o ponto $(0,1)$.

$y = e^{-x}$, $x = -1$:
$x = -1 \Longrightarrow e^{-x} = e$.
O único ponto de intersecção destas curvas é o ponto $(-1,e)$.

$y = 1+x$, $x = -1$:
$x = -1 \Longrightarrow 1+x = 0$.
O único ponto de intersecção destas curvas é o ponto $(-1,0)$.

A área pretendida é:

$$A = \int_{-1}^{0} \left(e^{-x} - (1+x)\right) dx = \int_{-1}^{0} \left(e^{-x} - 1 - x\right) dx \underset{\text{regra de Barrow}}{=} =$$

$$= \left[-e^{-x} - x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = -1 - \left(-e + 1 - \frac{1}{2}\right) = -1 + e - 1 + \frac{1}{2} =$$

$$= e - \frac{3}{2} \ .$$

Dois Teoremas Importantes do Cálculo Integral.

Teorema de Integrabilidade das Funções Contínuas.
Toda a função real contínua, definida num intervalo limitado e fechado, é integrável nesse intervalo.

Teorema de Integrabilidade do Valor Absoluto.
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável.
Então:

$$|f| \text{ também é integrável em } [a, b]$$

Teorema do Valor Médio.
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.
Então:

$$\exists c \in [a, b] : \int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b - a) \ .$$

Alguns Resultados Úteis Relativos ao Integral.

Teorema de Monotonia do Integral.
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis tais que

$$\forall x \in [a, b] : f(x) \leq g(x) \ .$$

Então:

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx \ .$$

Como consequências imediatas do teorema anterior, temos:

Proposição.
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável tal que

$$\forall x \in [a, b] : f(x) \geq 0 \ .$$

Então:

1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$.

Se f for contínua e verificar $\forall x \in [a, b] : f(x) > 0$ podemos mesmo concluir facilmente, usando o Teorema do Valor Médio, que $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx > 0$.

2) Se existir $M \geq 0$ tal que $\forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M$, tem-se:

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx \leq M(b - a) \ .$$

VII. Definição de Integral e Critérios de Integrabilidade.

5) Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e não-negativa. Mostremos que se $\int\limits_a^b f(x)\ dx = 0$ então

$$\forall x \in [a, b] : f(x) = 0 \ .$$

Suponhamos que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) > 0$.

Logo, visto que f é contínua, existe um intervalo limitado e fechado $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, com $a_1 < b_1$, tal que

$$\forall x \in [a, b] : f(x) > 0 \ .$$

Sendo assim,

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x)\ dx > 0 \ .$$

Ora, pela aditividade do integral relativamente aos intervalos, tem-se:

$$0 = \int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_a^{a_1} f(x)\ dx + \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x)\ dx + \int\limits_{b_1}^{b} f(x)\ dx \ .$$

Logo,

$\int\limits_a^{a_1} f(x)\ dx < 0 \vee \int\limits_{b_1}^{b} f(x)\ dx < 0$, o que contradiz o facto de f ser não-negativa.

Sendo assim,

$$\forall x \in [a, b] : f(x) = 0 \ .$$