CDI-I

3^a Ficha-8^a Aula Prática (2^a parte)

I. Representação gráfica de funções.

2) $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua no ponto 0 tal que

$$f(x) = \sqrt{x}\log x \quad ; x > 0 \ .$$

(a) Calculemos $f(0)$.

Ora,

f é contínua no ponto 0 $\Longleftrightarrow f(0) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow f(0) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} (\sqrt{x}\log x) \Longleftrightarrow f(0) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f(0) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\log x}{x^{-\frac{1}{2}}} \underset{\text{Regra de Cauchy}}{\Longleftrightarrow} f(0) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f(0) = -2\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{x^{-\frac{3}{2}}} \Longleftrightarrow f(0) = -2\lim_{x\longrightarrow 0^+} x^{-1+\frac{3}{2}} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow f(0) = -2\lim_{x\longrightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} \Longleftrightarrow f(0) = -2\lim_{x\longrightarrow 0^+} \sqrt{x} \Longleftrightarrow f(0) = 0 \ .$$

(b) Pretende-se determinar equações para as tangentes ao gráfico de f , nos pontos com abcissas $x = 0$ e $x = 1$.

RESULTADO IMPORTANTE

Existindo derivada de f no ponto a , tem-se:

(i) Se $f'(a) = -\infty$ ou $f'(a) = +\infty$, então a tangente ao gráfico de f , no ponto de abcissa $x = a$, admite como equação:

$$x = a \ .$$

(ii) Se $f'(a) \in \mathbb{R}$, então a tangente ao gráfico de f , no ponto de abcissa $x = a$, admite como equação:

$$y = f(a) + \ f'(a)(x = a) \ .$$

Determinemos $f'(0)$ e $f'(1)$.

Ora,

$f'(0) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{f(0)=0}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} =$

$$= \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}\log x}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\log x}{x^{\frac{1}{2}}} \underset{\text{Regra de Cauchy}}{=}$$

$$= \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = 2\lim_{x\longrightarrow 0^+} x^{-1+\frac{1}{2}} = 2\lim_{x\longrightarrow 0^+} x^{-\frac{1}{2}} =$$

$= 2 \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Logo, a tangente ao gráfico de f , no ponto de abcissa $x = 0$, admite como equação:

$$x = 0 \quad \text{(isto é, trata-se do eixo das ordenadas).}$$

$f'(1) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} \frac{\sqrt{x}\log x - \sqrt{1}\log 1}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x \longrightarrow 1} \frac{\sqrt{x}\log x}{x-1} = \left(\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \sqrt{x}\right)\left(\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \frac{\log x}{x-1}\right) \underset{\lim\limits_{x \longrightarrow 1}\sqrt{x}=1}{=} \lim\limits_{x \longrightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} \underset{\text{Regra de Cauchy}}{=}$

$= \lim\limits_{x \longrightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$.

Logo, a tangente ao gráfico de f , no ponto de abcissa $x = 1$, admite como equação:

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) \underset{\substack{f(1)=0 \\ f'(1)=1}}{\Longleftrightarrow} y = x - 1.$$

(c) Determinemos os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas de f.

Façamos um estudo completo de f .

Domínio de f :
$D_f = [0, +\infty[$.

Pontos de intersecção do gráfico de f com os eixos cooedenados:
$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee (x > 0 \wedge \sqrt{x}\log x = 0) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x = 0 \vee \log x = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee x = 1$.
Logo, os pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo das abcissas são: $(0,0)$, $(1,0)$.
$f(0) = 0 \Longrightarrow$ o único ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo das ordenadas é $(0,0)$.

Limite no infinito:
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x}\log x = +\infty$.

Assímptotas verticais de f :
f é contínua em $[0, +\infty[\Longrightarrow$ o gráfico de f não tem assímptotas verticais.

Assímptotas não-verticais de f :
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}\log x}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^{\frac{1}{2}}} \underset{\text{Regra de Cauchy}}{=}$

$= \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}} = 2 \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^{-1+\frac{1}{2}} = 2 \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^{-\frac{1}{2}} = 2 \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 = m$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Logo, o gráfico de f não admite assímptotas não-verticais quando $x \longrightarrow +\infty$ (e só quando $x \longrightarrow +\infty$ teria sentido estudar assímptotas não-verticais, pois $D_f = [0, +\infty[$).

Intervalos de monotonia, extremos e pontos de inflexão:
Ora,
$x > 0 \Longrightarrow f'(x) = (\sqrt{x}\log x)\text{'}{=}(\sqrt{x})' \log x + \sqrt{x}\frac{1}{x} =$
$= \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \log x + x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\log x + x^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\log x + 1\right) =$
$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\log x + 1\right).$
Já vimos que f não é diferenciável no ponto 0 ($f'(0) = +\infty$).

$x > 0$:
$f''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\log x + 1\right)\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\log x + 1\right)\right)' =$
$= \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}\right)\left(\frac{1}{2}\log x + 1\right) + x^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\log x + 1\right) + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} =$
$= \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{2}\log x - 1 + 1\right) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\log x = -\frac{1}{4}\frac{\log x}{x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4}\frac{\log x}{x\sqrt{x}}$.

Zeros e sinal de f' :
$x \in]0, +\infty[\Longrightarrow f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\log x + 1\right) = 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\log x + 1 = 0 \Longleftrightarrow \log x = -2 \Longleftrightarrow x = e^{-2} \approx 0,135\,34$.
$x \in]0, +\infty[\Longrightarrow f''(x) < 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\log x + 1\right) < 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\log x + 1 < 0 \Longleftrightarrow \log x < -2 \Longleftrightarrow \log x < \log e^{-2} \underset{x\in]0,+\infty[}{\Longleftrightarrow} 0 < x < e^{-2}$.
$x \in]0, +\infty[\Longrightarrow f''(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\log x + 1\right) > 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\log x + 1 > 0 \Longleftrightarrow \log x > -2 \Longleftrightarrow \log x > \log e^{-2} \Longleftrightarrow x > e^{-2}$.

Tem-se a tabela:

	0		e^{-2}	
$f'(x)$	$+\infty$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{1}{e}\log e^{-2} = -\frac{2}{e} \approx -0.735\,76$ (mínimo local)	$\nearrow$

Logo, pelo Teorema de Bolzano:
$-\frac{2}{e}$ é mesmo um mínimo global de f .
Recorde-se, ainda, que:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty \ .$$

Sendo assim, ainda pelo Teorema de Bolzano, o contradomínio de f é igual a:

$$CD_f = \left[-\frac{2}{e}, +\infty\right[\ .$$

Zeros e sinal de f'' :
$x \in \left]0, +\infty\right[\Longrightarrow f''(x) = 0 \Longleftrightarrow -\frac{1}{4}\frac{\log x}{x\sqrt{x}} = 0 \Longleftrightarrow \log x = 0 \Longleftrightarrow x = 1$.

$0 < x < 1 \Longrightarrow \log x < 0 \Longrightarrow f''(x) = -\frac{1}{4}\frac{\log x}{x\sqrt{x}} > 0$.

$1 < x \Longrightarrow \log x > 0 \Longrightarrow f''(x) = -\frac{1}{4}\frac{\log x}{x\sqrt{x}} < 0$.

Tem-se a tabela:

	0		1	
$f''(x)$	não definida	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\cup$	0	$\cap$

.

Ponto de inflexão: $(1, f(1)) = (1, 0)$.

(d) Gráfico de f :