CDI-I

3^a Ficha (parte 1) - 9^a Aula prática

II. Funções Trigonométricas e Hiperbólicas Inversas.

3)

(b) Sendo $f(x) = \arcsin e^x$, determinemos D_f .
Ora,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x \in [-1,1]\}.$$

Mas,
$e^x \in [-1,1] \underset{e^x>0}{\Longleftrightarrow} e^x \in]0,1] \underset{\log \text{ é estritamente crescente}}{\Longleftrightarrow} \log(e^x) \in]-\infty, \log 1] \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x \in]-\infty, 0]$.
Logo,

$$D_f =]-\infty, 0] \ .$$

(d) Sendo $f(x) = \arccos \frac{1}{x}$, determinemos D_f .
Ora,

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} \in [-1,1]\right\}.$$

$x > 0$:
$-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{x} \leq 1 \Longleftrightarrow 1 \leq x \Longleftrightarrow x \in [1, +\infty[$.
$x < 0$:
$-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq \frac{1}{x} < 0 \Longleftrightarrow -x \geq 1 \Longleftrightarrow x \leq -1 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, -1]$.
Logo,

$$D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\ .$$

(**h**) Sendo $f(x) = \log(1 - \arctan x)$, determinemos D_f .
Ora,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - \arctan x \in]0, +\infty[\}.$$

$1 - \arctan x > 0 \Longleftrightarrow 1 > \arctan x \underset{\tan \text{ é estritamente crescente}}{\Longleftrightarrow} \tan 1 > \tan(\arctan x) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \tan 1 > x \Longleftrightarrow x \in]-\infty, \tan 1[$.
Logo,

$$D_f =]-\infty, \tan 1[.$$

6)

(a) Seja $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{2} \in [-1,1]\right\} = [-2, 2] \ .$$

Ora,

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \ .$$

Sendo assim,
$f'(x) = \left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.
Logo, o domínio de diferenciabilidade de f é:

$$D_f^{(1)} = \left]-2, 2\right[\ .$$

(b) Seja $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} \in [-1, 1]\right\} \underset{\text{ver } \mathbf{3.(d)}}{=} \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[\ .$$

Ora,

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \ .$$

Sendo assim,
$f'(x) = \left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$.
Ora,
$1 - \frac{1}{x^2} > 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x^2} < 1 \Longleftrightarrow x^2 > 1 \Longleftrightarrow x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$.
Logo, o domínio de diferenciabilidade de f é:

$$D_f^{(1)} = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[\ .$$

(d) Seja $f(x) = \arctan(\sqrt{x})$.

$$D_f = \left[0, +\infty\right[\ .$$

Ora,

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2} \ .$$

Sendo assim,
$f'(x) = (\arctan(\sqrt{x}))' = \left(\arctan\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\right)' = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.
Logo, o domínio de diferenciabilidade de f é:

$$D_f^{(1)} = \left]0, +\infty\right[\ .$$

7) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx \ ; \ x \leq 0 \\ \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \ ; \ x > 0 \end{cases} ,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ fixos.

(a) Mostremos, primeiro, que f é diferenciável no ponto 1 .

Ora, f é diferenciável no intervalo $]0, +\infty[$ porque, nesse conjunto, é a composta de duas funções diferenciáveis, tendo-se:

$$f'(x) = \left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{1+x^2} \ .$$

Logo,

$$f'(1) = -\frac{1}{2} \ .$$

Sendo assim, uma equação da tangente ao gráfico de f , no ponto de abcissa 1, é

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Longleftrightarrow y - \arctan 1 = -\frac{1}{2}(x-1) \Longleftrightarrow y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) \ .$$

(b) Sabendo que f é diferenciável no ponto 0 (dado do exercício), determinemos a e b , usando a continuidade de f no ponto 0 e as derivadas laterais de f no ponto 0 , $f'_e(0)$ e $f'_d(0)$.

Ora,

f é diferenciável no ponto $0 \Longrightarrow f$ é contínua no ponto $0 \Longrightarrow f(0) =$
$= \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) \Longleftrightarrow a = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty}{\Longleftrightarrow} a = \lim\limits_{y \longrightarrow +\infty} \arctan y \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow a = \frac{\pi}{2}$.

Por outro lado,

f é diferenciável no ponto $0 \Longrightarrow f'_e(0) = f'_d(0) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} =$
$= \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \frac{\frac{\pi}{2}+bx-\frac{\pi}{2}}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{2}}{x} \Longleftrightarrow b = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{2}}{x} \underset{\text{Regra de Cauchy}}{\Longleftrightarrow}$
$\underset{\text{ver (a)}}{\Longleftrightarrow} b = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{1} \Longleftrightarrow b = -1$.

(c) Tem-se:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x \ ; \ x \leq 0 \\ \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \ ; \ x > 0 \end{cases}$$

E, usando as alíneas anteriores, obtém-se:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 \ ; \ x \leq 0 \\ -\frac{1}{1+x^2} \ ; \ x > 0 \end{cases}$$

Ora,

f' é contínua em $]-\infty, 0[$ porque, neste conjunto, é uma função constante.

f' é contínua em $]0, +\infty[$ porque, neste conjunto, é uma função racional (quociente de duas funções polinomiais).

Por outro lado,
$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f'(x) = -1 = f'(0)$.
Logo,
f' é contínua à esquerda no ponto 0 .
$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = -1 = f'(0)$.
Logo,
f' é contínua à direita no ponto 0 .
Sendo assim,

$$f' \text{ é contínua em todo o } \mathbb{R} \;;$$

isto é, f é de classe C^1 em $\mathbb{R}$:

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \;.$$