CDI-I

4^a Ficha - 14^a Aula Prática

Definição.

Uma série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diz-se **convergente (em** $\mathbb{R}$) sse a sucessão das suas somas parciais, de termo geral $S_n = \sum_{k\tilde{}=0}^{n} a_k$, for convergente (quando isto não acontecer, a série dir-se-á **divergente**).

Sendo $S \in \mathbb{R}$ tal que $S = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n$, diz-se que S é a soma da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, escrevendo-se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S \ .$$

(Por vezes, o somatório começa num número natural diferente de 0).

Uma série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diz-se **absolutamente convergente** sse a série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ for convergente.

Uma série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diz-se **simplesmente convergente** (ou **condicionalmente convergente**) sse for convergente mas não for absolutamente convergente.

Tem-se o seguinte resultado importante:

Proposição.

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente$\Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = 0$.

No entanto, pode acontecer que se tenha $\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = 0$, sendo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ divergente , como veremos , mais adiante, quando apresentarmos a **série harmónica.**

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente.

Exemplos.
1) A Série Geométrica de Razão x .

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \ .$$

Esta série converge sse $|x| < 1$, tendo-se:

$$|x| < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \ .$$

Por exemplo, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é convergente, tendo-se:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \ .$$

Mas, $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n$ é divergente.

2) As Séries Redutíveis ou de Mengoli.
Estas séries têm a forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) \ .$$

Estas séries convergem sse (a_n) é convergente, tendo-se:

$$(a_n) \ \text{é convergente} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_0 - \lim_{n \longrightarrow +\infty} a_{n+1} \ .$$

Por exemplo, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ é convergente, tendo-se:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0 \ .$$

3) Séries de Dirichlet.
Estas séries têm a forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ , sendo } \alpha \text{ um número real fixo .}$$

Estas séries convergem sse $\alpha > 1$.

Por exemplo, a **série harmónica**: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$, é divergente; mas $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ são convergentes.

Séries de Termos Não-Negativos.

Critério Geral de Comparação.
Sejam $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ séries tais que, a partir de certa ordem, se tenha

$$0 \leq a_n \leq b_n \ .$$

Então:
a)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ é convergente} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ é convergente .}$$

b)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ é divergente} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ é divergente .}$$

Como consequência do critério anterior, tem-se:

Corolário.
Sejam $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ séries de termos positivos tais que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \text{ , com } 0 < l < +\infty \ .$$

Então:

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ têm a mesma natureza (isto é, são ambas convergentes ou ambas divergentes).

Critério da Raiz de Cauchy.

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não-negativos tal que $\overline{\lim_{n\longrightarrow+\infty}} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty]$.
Então:

a) $l < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente,

b) $l > 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente,

sendo $\overline{\lim_{n\longrightarrow+\infty}} \sqrt[n]{a_n}$ (**limite superior** da sucessão $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$) o maior dos sublimites da sucessão $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$.
(é claro que, quando $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ é convergente (em $\overline{\mathbb{R}}$), se tem $\overline{\lim_{n\longrightarrow+\infty}} \sqrt[n]{a_n} =$
$= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{a_n}$) .

Como consequência imediata, tem-se:

Critério de d'Alembert.

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos tal que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty]$.
Então:

a) $l < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente,

b) $l > 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Critério do Integral.

Sejam p um número natural fixo, $f : [p, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função decrescente não-negativa e (t_n) a sucessão de termo geral $t_n = \int_p^n f(x)\,dx$, para $n \geq p$.

Então:

a) $\sum_{n=p}^{+\infty} f(n)$ é convergente$\Longleftrightarrow (t_n)$ é convergente.

b) $\sum_{n=p}^{+\infty} f(n)$ é divergente$\Longleftrightarrow (t_n)$ é divergente.

Séries Alternadas.

Definição. Uma série alternada tem a forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots \ ,$$

sendo (a_n) uma sucessão de termos não-negativos.

Tem-se o seguinte critério de convergência:

Critério de Leibniz.

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ uma série alternada, tal que (a_n) é uma sucessão decrescente e $\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = 0$.

Então:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \text{ é convergente.}$$

Mais ainda, o erro cometido quando se substitui a soma da série, S , pela soma parcial de ordem n , S_n , é dado por:

$$|S - S_n| \leq a_{n+1} \ .$$

Como aplicação imediata deste critério, verificamos que a **série harmónica alternada:** $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \cdots$, é convergente. Visto que a série harmónica é divergente, conclui-se que a série harmónica alternada é simplesmente convergente.

Resolvamos alguns exercícios:

III. Séries Numéricas.

1)

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{6^{n+1}} = \frac{2}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{6}\right)^n + \frac{3}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^n \underset{\text{temos duas séries geométricas com } |x|<1}{=}$
$= \frac{2}{6} \frac{1}{1-\frac{2}{6}} + \frac{3}{6} \frac{1}{1-\frac{3}{6}} = \frac{2}{6} \frac{1}{\frac{4}{6}} + \frac{3}{6} \frac{1}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} =$
$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \underset{\text{temos duas séries geométricas com } |x|<1}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} =$
$= 2 - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{3}{2}} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$.

2) Determinemos a natureza (convergência ou divergência) das seguintes séries.

b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.
Ora, para $n \geq 1$, tem-se:
$\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \in]0, +\infty[.$
Sendo assim, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ têm a mesma natureza.
Ora, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ é divergente (é uma série de Dirichlet com $\alpha < 1$).
Logo,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \text{ é divergente.}$$

f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(n+1)}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
Ora,
$\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \sqrt{1} = 1 \in]0, +\infty[.$
Sendo assim, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ têm a mesma natureza.
Ora, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ é divergente (é uma série de Dirichlet com $\alpha < 1$).
Logo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{ é divergente.}$$

j) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{4^n+1}$.
Ora,
$\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{5^n}{4^n+1}}{\left(\frac{5}{4}\right)^n} = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{4^n}{4^n+1} = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{4^n}} = 1 \in]0, +\infty[.$

Sendo assim, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{4^n+1}$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$ têm a mesma natureza.

Ora, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$ é divergente (é uma série geométrica com $|x| > 1$).

Logo,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{4^n+1} \text{ é divergente.}$$

3)

d) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$.

Ora, para $n \geq 1$, tem-se:

$\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \left(\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!}\right) \left(\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right) = \left(\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n+1}\right) \left(\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right) =$
$= (0)\,(1) = 0 < 1.$

Logo, pelo Critério de d'Alembert:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} \text{ é convergente.}$$

i) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

Ora, para $n \geq 1$, tem-se:

$\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = 2\left(\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n!}\frac{1}{n+1}\right) \left(\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}\right) =$
$= 2\,(1) \left(\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right) = 2\,(1)\,\frac{1}{e} = \frac{2}{e} < 1.$

Logo, pelo Critério de d'Alembert:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \text{ é convergente.}$$

4)

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n}$.

Seja $f : [3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{\log x}{x}$.

É claro que f é não-negativa.

Por outro lado, para qualquer $x \in [3, +\infty[$:

$f'(x) = \left(\frac{\log x}{x}\right)' = \frac{1-\log x}{x^2} < 0$.

Logo, f é decrescente.

Ora, para $n \geq 3$:

$t_n = \int\limits_3^n \frac{\log x}{x}\, dx = \int\limits_3^n \frac{1}{x}. \log x\, dx = \left[\frac{\log^2 x}{2}\right]_3^n =$

$= \frac{1}{2}\left(\log^2 n - \log^2 3\right)$.

Visto que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} t_n = +\infty$, conclui-se, pelo Critério do Integral, que $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\log n}{n}$ é divergente (em $\mathbb{R}$); logo, o mesmo acontece com $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\log n}{n}$.

c) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$.

Seja $f : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{1}{x \log x}$.

É claro que f é não-negativa.

Por outro lado, para qualquer $x \in [2, +\infty[$:

$f'(x) = \left(\frac{1}{x \log x}\right)' = \frac{-\log x - 1}{x^2 \log^2 x} = -\frac{\log x + 1}{x^2 \log^2 x} < 0$.

Logo, f é decrescente.

Ora, para $n \geq 2$:

$t_n = \int\limits_2^n \frac{1}{x \log x}\, dx = \int\limits_2^n \frac{\frac{1}{x}}{\log x}\, dx = [\log(\log x)]_2^n =$

$= (\log(\log x) - \log(\log 2))$.

Visto que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} t_n = +\infty$, conclui-se, pelo Critério do Integral, que $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$ é divergente (em $\mathbb{R}$) .

7) Determinemos se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries.

c) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Ora,

$\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$ é decrescente e $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 0$.

Logo, pelo Critério de Leibniz,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} \text{ é convergente.}$$

Consideremos a série dos módulos:

$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Ora, para $n \geq 1$, tem-se:

$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = 1 \in]0, +\infty[$.

Visto que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente , concluimos que o mesmo se passa com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ e, portanto, com $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Logo, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ não é absolutamente convergente, embora seja convergente.

Sendo assim, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ é simplesmente convergente.

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2-1}$.

Ora,

$\left(\frac{1}{2n^2-1} \right)$ é decrescente e $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2-1} = 0$.

Logo, pelo Critério de Leibniz,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2-1} \text{ é convergente.}$$

Consideremos a série dos módulos:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{2n^2-1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2-1}$.

Ora,

$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^2}{2n^2-1} = \frac{1}{2} \in]0, +\infty[$.

Visto que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente , concluimos que o mesmo se passa com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2-1}$.

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2-1}$ é absolutamente convergente.