CDI-I

4^a Ficha - 15^a Aula Prática

Definição.
Sejam $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ números reais.

Uma série da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ diz-se **uma série de potências** de x com **coeficientes** $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Tem-se o seguinte resultado importante:

Teorema. Sejam $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ uma série de potências de x e $R \in [0, +\infty]$ definido por:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n \longrightarrow +\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Então:
a) A série é **absolutamente convergente** no intervalo $]-R, R[$.
b) A série é **divergente** em $]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$.
c) Para $x = -R$ ou $x = R$, quando $R \in]0, +\infty[$, nada se pode concluir, à partida, relativamente à convergência ou divergência da série (é preciso analisar caso a caso).

R diz-se o **raio de convergência** da série de potências e ao subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a série é convergente dá-se o nome de **domínio** ou **intervalo de convergência** da série.

Observação.
1) Se $R = 0$, a série de potências apenas converge no ponto $x = 0$.
2) Se $R = +\infty$, a série de potências converge em todos os pontos de $\mathbb{R}$.
3) Se existir, em $[0, +\infty]$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, tem-se:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \ .$$

4) Se existir, em $[0, +\infty]$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, tem-se:

$$R = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \ .$$

Alguns Exemplos de Desenvolvimentos de Funções em Séries de Potências (trata-se de desenvolvimentos em Série de Maclaurin).

$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$, com intervalo de convergência igual a $\mathbb{R}$.

$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$, com intervalo de convergência igual a $\mathbb{R}$.

$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$, com intervalo de convergência igual a $\mathbb{R}$.

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ fixo:
$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$, para $x \in \left]-1, 1\right[$.

$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$, com intervalo de convergência igual a $\left]-1, 1\right]$.

Vejamos alguns exercícios:

IV. Séries de Potências.

1)

e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} (x+1)^n$.

Ora,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} (x+1)^n \underset{y=x+1}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} y^n$$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}} = \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right) \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+1} \right) =$$

$$= \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \right) \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+1} \right) = \left(\sqrt{1}\right)(1) = 1 \ .$$

O raio de convergência é:

$$R = 1 \ .$$

Ora,

$-1 < y < 1 \Longleftrightarrow -1 < x+1 < 1 \Longleftrightarrow -2 < x < 0$.

Sendo assim:

A série é absolutamente convergente no intervalo $]-2,0[$ e é divergente em $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$.

Para $x=-2$:

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}(x+1)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}(-1)^n$.

Seja $f{:}[1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1} \ .$$

Tem-se:

$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)-\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} =$
$= \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \leq 0$.

Logo, visto que $\frac{\sqrt{0}}{0+1} \leq \frac{\sqrt{1}}{1+1}$:

$\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)$ é decrescente.

Por outro lado,

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{\frac{n}{(n+1)^2}} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{\frac{n}{n^2+2n+1}} = \sqrt{0} = 0$.

Sendo assim, pelo Critério de Leibniz:

A série é convergente para $x=-2$ (podemos desprezar o termo de ordem 0 ou qualquer número finito de termos de uma série sem alterar a sua natureza).

Vejamos se a convergência, nesse ponto, é absoluta; isto é, se $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{\sqrt{n}}{n+1}(-1)^n\right|$ é convergente:

Ora, para $n \geq 1$:

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \in]0,+\infty[$.

Logo. as séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ têm a mesma natureza.

Mas, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ é divergente (é uma série de Dirichlet com $\alpha \leq 1$).

Sendo assim, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ é divergente e, portanto, também $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ o é.

A série é simplesmente convergente no ponto $x=-2$ (é convergente mas não é absolutamente convergente).

Para $x=0$:

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}(x+1)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ que já vimos que é divergente.

O intervalo de convergência da série é $[-2,0[$.

k) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(5x+1)^n}{n^2+1}$.

Ora,

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(5x+1)^n}{n^2+1} \underset{y=5x+1}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} y^n$

$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{(n+1)^2+1}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^2+2n+2}{n^2+1} = 1$.

O raio de convergência é:

$$R = 1 \ .$$

Ora,

$-1 < y < 1 \Longleftrightarrow -1 < 5x+1 < 1 \Longleftrightarrow -\frac{2}{5} < x < 0$.

Sendo assim:

A série é absolutamente convergente no intervalo $\left]-\frac{2}{5}, 0\right[$ e é divergente em $]-\infty, -2[\,\cup\,]0, +\infty[$.

Para $x = -\frac{2}{5}$:

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(5x+1)^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} (-1)^n$.

Tem-se:

$\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1} = \frac{n^2+2n+2-n^2-1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} = \frac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} \geq 0$.

Logo,

$\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ é decrescente.

Por outro lado,

$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$.

Sendo assim, pelo Critério de Leibniz:

A série é convergente para $x = -\frac{2}{5}$.

Vejamos se a convergência, nesse ponto, é absoluta; isto é, se $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{n^2+1} (-1)^n \right|$ é convergente:

Ora, para $n \geq 1$:

$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \in]0, +\infty[$.

Logo. as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ têm a mesma natureza.

Mas, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente (é uma série de Dirichlet com $\alpha > 1$).

Sendo assim, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ é convergente e, portanto, também $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ o é.

A série é absolutamente convergente no ponto $x = -\frac{2}{5}$.

Para $x = 0$:

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(5x+1)^n}{n^2+1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ que já vimos que é convergente.

A série é absolutamente convergente no ponto $x = 0$.

O intervalo de convergência da série é $\left[-\frac{2}{5}, 0\right]$.