CDI-I-2^a Ficha de Avaliação

02/11/2012-MEBiom

Versão 2

1)

a) f é prolongável por continuidade ao ponto $0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) \Longleftrightarrow \lim_{x\longrightarrow 0^-} (-x(2+x)) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \log\left(\frac{k}{2+x^2}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 0 = \log\left(\frac{k}{2}\right) \Longleftrightarrow \frac{k}{2} = 1 \Longleftrightarrow k = 2 \ .$$

b) Sendo F o prolongamento por continuidade de f ao ponto 0 , tem-se:

$$F(x) = \begin{cases} \log\left(\frac{2}{2+x^2}\right), \ x > 0 \\ 0, \ x = 0 \\ -x(2+x), \ x < 0 \end{cases}$$

Determinemos o contradomínio de F , CD_F .
Ora,
$x \in]0,+\infty[\Longrightarrow 0 < \frac{2}{2+x^2} < 1 \Longrightarrow F(x) = \log\left(\frac{2}{2+x^2}\right) \in]-\infty, 0[$,

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \log\left(\frac{2}{2+x^2}\right) = \log 1 = 0 \ ,$$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \log\left(\frac{2}{2+x^2}\right) \underset{\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{2}{2+x^2} = 0^+}{=} \lim_{y\longrightarrow 0^+} \log y = -\infty \ .$$

Logo, pelo Teorema de Bolzano:
F assume todos os valores do intervalo $]-\infty, 0[$, quando $x \in]0,+\infty[$.
$F(0) = 0$.
Por outro lado,
$-x(2+x) = 0 \Longleftrightarrow x = -2 \vee x = 0$,

$$F\left(\frac{-2+0}{2}\right) = F(-1) = 1(2-1) = 1 \ ,$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} (-x(2+x)) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(-x^2 - 2x\right) = -\infty \ .$$

Logo, pelo Teorema de Bolzano:
F assume todos os valores do intervalo $]-\infty, 1]$, quando $x \in]-\infty, 0[$.
Sendo assim,
$CD_F =]-\infty, 1] \cup \{0\} \cup]-\infty, 0[=]-\infty, 1]$.

2)

(a) $f'(x) = \left(\frac{1}{2+\cos x}\right)' = \frac{-(-\sin x)}{(2+\cos x)^2} =$

$= \frac{\sin x}{(2+\cos x)^2}$.

(b) $f'(x) = \left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)' = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}\right) e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} =$

$= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

3) $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \left(3+x^2\right)^{\frac{1}{\log x}} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} e^{\frac{1}{\log x}\log\left(3+x^2\right)} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} e^{\frac{\log\left(3+x^2\right)}{\log x}}$.

Ora,

$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\log\left(3+x^2\right)}{\log x} \underset{\text{Regra de Cauchy}}{=} \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{2x}{3+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{2x^2}{3+x^2} =$

$= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{2}{\frac{3}{x^2}+1} = 2$.

Logo,

$\lim_{x\longrightarrow+\infty} e^{\frac{\log\left(3+x^2\right)}{\log x}} = \lim_{y\longrightarrow 2} e^y = e^2$.

4) f é contínua no intervalo limitado e fechado $[0,b]$; logo, pelo Teorema de Weierstrass, f tem mínimo, quando $x \in [0,b]$.

Seja

$$m = \min_{x\in[0,b]} f(x) \ .$$

Ora,

$$\forall x \in \left]b,+\infty\right[: m \leq f(b) < f(x) \ .$$

Logo,

$$m = \min_{x\in\left[0,+\infty\right[} f(x) \ .$$