Cálculo Diferencial e Integral I

MEC [1º Semestre, 2010/2011]

#01

1. Simplifique as seguintes expressões (definidas nos respectivos domínios):

   a) $\frac{\frac{x}{2}}{\frac{2}{x}}$,

   b) $\frac{x+1}{\frac{1}{x}+1}$,

   c) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x^2+x}$,

   d) $\sqrt{x^2}$,

   e) $\left(\sqrt{x}\right)^2$,

   f) $4^x \frac{4}{2^x}$,

   g) $2^{x^2} \left(2^x\right)^2$,

   h) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$,

   i) $\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}$,

   j) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$,

   k) $\log\left(\frac{1}{x}\right) + \log\left(x^2\right)$,

   l) $\log\left(2x^2 + 2x^{-2}\right) + \log\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^{-2}}{2}\right)$.

2. Resolva as seguintes equações e inequações:

   a) $(x^2 - 3x + 2)(x - 1) \geq 0$,

   b) $x \leq 2 - x^2$,

   c) $x^2 \leq 2 - x^4$,

   d) $x^3 + x \leq 2x^2$,

   e) $\sqrt[3]{x^2 + 2x} = 2$,

   f) $\sqrt[3]{x-1} = \sqrt{x-1}$,

   g) $\frac{x-1}{x^2-1} \leq 1$,

   h) $x = \frac{1}{x}$,

   i) $x < \frac{1}{x}$,

   j) $x < |x|$,

   k) $|x| \geq \frac{x}{2} + 1$,

l) $|x| \leq |x-2|$,

m) $|x^2 - 2| \leq 2$,

n) $\frac{x^4-16}{|x-1|} \leq 0$,

o) $e^{x^3} < 1$,

p) $e^{-2x} - 2e^{-x} \leq -1$,

q) $\log\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$,

r) $\log(x^2 - 3) \geq 0$.

3. Escreva cada um dos seguintes conjuntos como intervalos ou reuniões de intervalos:

a) $\{x : \frac{x-1}{x+1} \leq 1\}$,

b) $\{x : \frac{x^4-1}{x^3} \leq x\}$,

c) $\{x : |3x-4| \geq x^2\}$,

d) $\{x : |x-1|(x^2-4) \geq 0\}$,

e) $\{x : (|x|-1)(x^2-4) \leq 0\}$,

f) $\{x : |x^2-1| \leq |x+1|\}$,

g) $\{x : x^2 - |x| - 2 \leq 0\}$,

h) $\{x : \frac{x}{|x|-1} \geq 0\}$,

i) $\left\{x : \frac{x^2-|x|}{x-3} \leq 0\right\}$.

Cálculo Diferencial e Integral I

MEC [1º Semestre, 2010/2011]

#02

1. Indique justificando quais das proposições seguintes são verdadeiras:

   a) $\{1\} \subset \{1, \{2, 3\}\}$
   b) $\{1\} \in \{1, \{2, 3\}\}$
   c) $2 \in \{1, \{2, 3\}\}$
   d) $1 \in \{\mathbb{R}\}$
   e) $\emptyset = \{x \in \mathbb{N} : x = x + 1\}$
   f) $\emptyset \in \{0\}$
   g) $\emptyset \subset \{0\}$
   h) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$
   i) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, x > 1 \Leftrightarrow x^{-1} < 1$
   j) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\, x < y \Rightarrow y^{-1} < x^{-1}$
   k) $\forall_{x\neq 0}\, x^2 > 0$
   l) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\, x < y \Rightarrow x^2 < y^2$
   m) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\, x < y < 0 \Rightarrow x^2 > y^2$

2. Verifique que $\forall_{a>0}\, a + \frac{1}{a} \geq 1$. (Sugestão: considere separadamente $a \geq 1$ e $a < 1$.)

3. (Exercícios 1.17, 1.18 e 1.19 de [2]) Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}_1$
   b) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para todo o natural $n \geq 1$
   c) $(n!)^2 > 2^n n^2$, para todo o natural $n \geq 4$
   d) $n! \geq 2^{n-1}$, para todo o natural $n \geq 1$

4. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$
   b) Para $a \in \mathbb{R}$, $(a - 1)(1 + a + \cdots + a^n) = a^{n+1} - 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$

c) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$, para qualquer $n\in\mathbb{N}$

d) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, para qualquer $n\in\mathbb{N}_1$

e) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}$, para qualquer $n\in\mathbb{N}_1$

5. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

a) $(n+2)!\geq 2^{2n}$, para qualquer $n\in\mathbb{N}_1$

b) $2n-3<2^{n-2}$, para todo o natural $n\geq 5$

c) 7^n-1 é múltiplo[1] de 6 para qualquer $n\in\mathbb{N}_1$

d) $2^{2n}+2$ é múltiplo de 3 para qualquer $n\in\mathbb{N}$

6. (Exercício 1.20 de [2]) Demonstre a desigualdade de Bernoulli: Sendo $a>-1$ e $n\in\mathbb{N}$,

$$(1+a)^n\geq 1+na.$$

7. Seja $P(n)$ a condição "n^2+3n+1 é par".

a) Mostre que $P(n)\Rightarrow P(n+1)$

b) Pode concluir que n^2+3n+1 é par, para qualquer $n\in\mathbb{N}$?

c) Mostre que para qualquer $n\in\mathbb{N}$, n^2+3n+1 é ímpar

8. Seja $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ tal que $f(0)=1$ e $f(n+1)=(2n+2)(2n+1)f(n)$. Mostre por indução matemática que, para qualquer $n\in\mathbb{N}$,

$$f(n)=(2n)!$$

9. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases}u_1=3,\\ u_{n+1}=\frac{3u_n}{(n+1)^2}.\end{cases}$$

Mostre usando indução matemática que $u_n=\frac{3^n}{(n!)^2}$, para qualquer $n\in\mathbb{N}_1$.

10. (Teste de 29-4-2006) Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases}u_1=1,\\ u_{n+1}=\sqrt{2u_n^2+1}.\end{cases}$$

Mostre usando indução matemática que $u_n=\sqrt{2^n-1}$, para qualquer $n\in\mathbb{N}_1$.

[1]Um número é múltiplo de 6 sse é da forma $6k$, para algum $k\in\mathbb{N}_1$.

11. Verifique que se $n \in \mathbb{N}$ é ímpar, então n^2 é também ímpar. O que pode concluir de $n \in \mathbb{N}$ sabendo que n^2 é par?

12. Verifique que se x, y são números racionais, então $x + y$, xy, $-x$, x^{-1} (para $x \neq 0$) são também números racionais.[2]

13. (Exercício I.3 de [1]) Verifique que, se x é um número racional diferente de zero e y um números irracional, $x+y$, $x-y$, xy e y/x são irracionais; mostre também que, sendo x e y irracionais, a sua soma, diferença, produto e quociente podem ser ou não ser irracionais.

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.

[2]Ou seja, $\mathbb{Q}$ é fechado para a adição e multiplicação e contem os simétricos e inversos de todos os seus elementos. Mostra-se assim, uma vez que também os elementos neutros 0 e 1 são racionais, que $\mathbb{Q}$ é um corpo. É fácil ver que também verifica as propriedades de ordem, ou seja, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

Cálculo Diferencial e Integral I

MEC [1º Semestre, 2010/2011]

#03

1. (Exercício 1.2 de [2]) Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{x}{2} + 2 \right\}, \qquad B = [-3, 4], \qquad C = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

   a) Mostre que $A \cap B = [-3, -\frac{4}{3}] \cup \{4\}$.

   b) Indique, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\min(A \cap B)$, $\max(A \cap B)$, $\inf(A \cap B \cap C)$, $\sup(A \cap B \cap C)$ e $\min(A \cap B \cap C)$.

2. (Exame de 19/1/2000) Considere os conjuntos A e B definidos por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \frac{x-1}{x \log x} > 0 \right\}, B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, x = -\frac{1}{n}\,, n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

   Mostre que o conjunto A é igual a $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Determine, caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos conjuntos A e $A \cup B$.

3. (Exercício 1.8 de [2]) Considere os conjuntos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \frac{1}{\log x} \geq 1 \right\}, B = \left\{ 1 - \frac{(-1)^n}{n}\,, n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

   Para cada um dos conjuntos A e B, indique o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, no caso de existirem (em $\mathbb{R}$), o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo.

4. Sejam A, B e C os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} :\, x^2 + 2|x| > 3\}, \qquad B = \left]0, \sqrt{2}\right[,$$

$$C = \left\{ \sqrt{2} - \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

   a) Calcule A sob a forma de uma reunião de intervalos.

   b) Indique, caso exista, $\inf A$, $\min A \cap B$, $\max A \cap B$, $\max A \cap B \cap \mathbb{Q}$, $\inf A \cap B \cap \mathbb{Q}$, $\max C$, $\max B \setminus C$.

5. (Exame de 2000) Sejam A e B os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \le x^2 - 1\}, \qquad B = [-2, 2].$$

   a) Determine A sob a forma de reunião de intervalos.

   b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, o máximo e o mínimo de $A \cap B$ e o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $(A \cap B) \setminus \mathbb{Q}$.

6. (Exame de 30/11/2002) Considere os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : |x^2 - 2| \le 2x + 1\right\}, \qquad B = \mathbb{Q}, \qquad C = \left\{\frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

   a) Mostre que $A = \left[-1 + \sqrt{2}, 3\right]$.

   b) Determine, se existirem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $A \cap B$, C.

7. (Exame de 16/1/2004) Considere os seguintes conjuntos de números reais:

$$A = \left\{x : \frac{x^2 - 1}{x} \ge |x - 1|\right\}, \qquad B = \{x : \operatorname{sen} x = 0\}, \qquad C = \mathbb{Q}.$$

   a) Mostre que $A = \left[-\frac{1}{2}, 0\right[\cup [1, +\infty[$.

   b) Escreva os conjuntos dos majorantes e minorantes de $A \cap C$ e $B \cap C$. Calcule ou conclua da não existência de $\sup A$, $\inf A \cap C$, $\min A \cap C$, $\min B$, $\sup B \cap C$.

8. (Teste de 12/11/2005) Considere os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : x \ge 0 \wedge \frac{x^4 - 4}{|x - 1|} \le 0\right\}, \qquad B = \{x : x \ge 0 \wedge \exists_{k \in \mathbb{N}}\, kx \notin \mathbb{Q}\}.$$

   a) Mostre que $A = \left[0, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}$ e justifique que $B = [0, +\infty[\setminus \mathbb{Q}$.

   b) Determine, ou mostre que não existem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de cada um dos conjuntos A e $A \setminus B$.

9. (Teste de 29/4/2006) Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : \frac{x^2 - 2}{|x| - 1} \le 0\right\}, \quad B = \{2^{n/2} : n \in \mathbb{N}_1\}.$$

   a) Mostre que $A = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right]$.

b) Determine ou justifique que não existem, os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de cada um dos conjuntos $A \cap \mathbb{Q}$, B e $B \cap \mathbb{Q}$.

10. (Exercício 1.10 de [2]) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, majorado e não vazio, e seja m um majorante de A, distinto do supremo desse conjunto. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(m) \cap A = \emptyset$.

11. (Exercício I.5 de [1]) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $A \subset B$ e suponha que A é não vazio e B é majorado. Justifique que existem os supremos de A e B e prove que se verifica $\sup A \leq \sup B$.

12. (Exercício 1.12 de [2]) Sendo U e V dois subconjuntos majorados e não vazios de $\mathbb{R}$, tais que $\sup U < \sup V$, justifique (de forma precisa e abreviada) as afirmações seguintes:

    a) Se $x \in U$, então $x < \sup V$.

    b) Existe pelo menos um $y \in V$ tal que $y > \sup U$.

13. (Exercício 1.14 de [2]) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.

    a) Prove que, se $\sup A < \inf B$, A e B são disjuntos.

    b) Mostre, por meio de exemplos, que se for $\sup A > \inf B \wedge \sup B > \inf A$, A e B podem ser ou não disjuntos.

Outros exercícios: 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.9, 1.11, 1.13, 1.16 de [2], Exercício I.4 de [1].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.

Cálculo Diferencial e Integral I

MEC [1º Semestre, 2010/2011]

#04

1. (Exercício II.1 de [1], excepto a), g)) Indique quais são majoradas, minoradas, limitadas, de entre as sucessões definidas do modo seguinte:

   a) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

   b) $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$.

   c) $u_n = (-1)^n n^2$.

   d) $u_n = n^{(-1)^n}$.

   e) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

   f) $u_1 = -1$, $u_{n+1} = -2u_n$.

   g) $u_1 = 0$, $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{3}$.

2. Para as sucessões consideradas no exercício anterior, indique se são monótonas (crescentes ou decrescentes).

3. Baseando-se directamente na definição de limite mostre que:

   a) $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$.

   b) $\frac{n^2}{n^2+1} \to 1$.

   c) A sucessão de termo geral $u_n = n^2$ é divergente.

4. (Exercício II.2 de [1]) A mesma questão que a anterior para:

   a) $\frac{2n-1}{n+1} \to 2$.

   b) $\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \to 1$.

5. Calcule o limite (em $\mathbb{R}$) ou justifique a sua não existência para cada uma das sucessões de termo geral

   a) $\frac{(2n+1)^3+n}{n^3+1}$,

   b) $\frac{(2n+1)^3+n^2}{(n+1)^2(n+2)}$,

   c) $\frac{(n+1)^2+2n^4}{(n+1)^4+2n^2}$,

   d) $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n-1}}$,

e) $\frac{1}{n}\left(2+\frac{1}{n}\right)$,

f) $\frac{1}{n}\left(2n+\sqrt{n}\right)$,

g) $\frac{(-1)^n}{n!}$,

h) $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{4n^2+1}}$,

i) $\frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+1}}$,

j) $\frac{n+1}{n!}$,

k) $\frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

l) $\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$,

m) $\frac{\sqrt[n]{1000}+1000}{n}$,

n) $\frac{n^n}{n^n+1}$,

o) $\frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[3]{n}}$,

p) $\frac{4^n}{1+4^{n^2}}$,

q) $\frac{(a^n)^2}{a^{n^2}}$, com $a>1$.

6. (Exercício 1.36 de [2]) Indique justificando abreviadamente a resposta, o conjunto dos valores reais de a para os quais a sucessão de termo geral $x_n=\frac{a^n}{2^{1+2n}}$ é

   a) convergente;

   b) divergente, mas limitada.

7. Dê exemplos de sucessões tais que:

   a) (u_n) tem termos em $]-\infty,1[$ e é crescente.

   b) (u_n) não é monótona e é convergente.

   c) (u_n) é divergente e $(|u_n|)$ é convergente.

   d) (u_n) é limitada e divergente.

   e) (u_n) tem termos em $\{\frac{1}{n}:\ n\in\mathbb{N}_1\}$ e é divergente.

   f) (u_n) tem termos em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e converge para um elemento de $\mathbb{Q}$.

8. Sejam A, B e C os subconjuntos de $\mathbb{R}$ considerados no Ex.4 - Aula 3:

   $$A=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2+2|x|>3\}=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[,\qquad B=\Big]0,\sqrt{2}\Big[,$$

$$C = \left\{ \sqrt{2} - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

Dê um exemplo ou justifique a não existência de

(i) uma sucessão de termos em A monótona e divergente;

(ii) uma sucessão de termos no conjunto B crescente e divergente;

(iii) uma sucessão de termos no conjunto B com limite em $\mathbb{R} \setminus B$;

(iv) uma sucesão de termos no conjunto $\mathbb{R} \setminus B$ com limite em B;

(v) uma sucessão de termos no conjunto $A \setminus B$ com limite em $A \cap B$;

(vi) uma sucessão de termo geral u_n no conjunto C tal que $\lim u_n < \sqrt{2}$.

9. Considere as sucessões definidas da seguinte forma, com $a, r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_1 = a, \\ u_{n+1} = r + u_n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = a, \\ v_{n+1} = r v_n. \end{cases}$$

(A sucessão (u_n) é uma *progressão aritmética* de primeiro termo a e razão r e a sucessão (v_n) é uma *progressão geométrica* de primeiro termo a e razão r.)

a) Mostre por indução matemática que $u_n = a + (n-1)r$ e $v_n = ar^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Dê exemplos de valores de r e de a tais que

(i) (u_n) seja monótona crescente;

(ii) (u_n) seja monótona decrescente;

(iii) (v_n) seja monótona crescente;

(iv) (v_n) não seja monótona.

c) Mostre que (u_n) não é limitada, para quaisquer $a \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$. Para que valores de r e a será (v_n) limitada? E convergente?

10. (Teste de 12-11-2005) Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2} \end{cases}.$$

a) Mostre usando indução que $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente.

c) Mostre que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

11. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2}, \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2+2}{3} \end{cases} .$$

a) Mostre usando indução que $1 < u_n < 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão decrescente.

c) Mostre que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

12. Seja $u_1 > 1$ e $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ para $n \in \mathbb{N}_1$. Mostre que u_n é convergente (sugestão: começe por provar por indução matemática que $1 < u_n < 2$, para todo o inteiro $n \geq 2$). Calcule $\lim u_n$.

13. (Exercício II.1g) de [1]) Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

a) Prove por indução que $1 \leq u_n < 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Prove por indução que (u_n) é crescente.
(Alternativamente, verifique que $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+\sqrt{2+u_n}}$.)

c) Justifique que (u_n) é convergente.

d) Aplicando limites a ambos os membros da expressão de recorrência, determine o limite de (u_n).

14. (Exercício 1.45 de [2]) Justifique que, se as condições

$$u_n > 0 \quad \text{e} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

são verificadas qualquer que seja $n \in \mathbb{N}_1$, então u_n é convergente.

15. (Exercício 1.47 de [2]) Sendo x_n o termo geral de uma sucessão monótona, y_n o termo geral de uma sucessão limitada e supondo verificada a condição

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$

prove que x_n é limitada e que as duas sucessões são convergentes para o mesmo limite.

Outros exercícios: 1.26, 1.29, 1.37, 1.44 de [2], II.5 a) – f) de [1].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.

Cálculo Diferencial e Integral I

MEC [1º Semestre, 2010/2011]

#05

1. (Exercício 1.34 de [2]) Das sucessões de termos gerais

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad v_n = \frac{n^{n+1}}{n^n + 1}, \quad w_n = u_n v_n$$

indique, justificando abreviadamente as respostas, quais as que são limitadas e as que são convergentes.

2. (Exercício 1.40 de [2]) Estude quanto à convergência as sucessões de termos gerais:

$$u_n = \cos(n!\pi), \quad v_n = \frac{n\cos(n\pi)}{2n+1}, \quad w_n = \frac{1+a^n}{1+a^{2n}} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

3. Calcule o limite (em $\mathbb{R}$) ou justifique a sua não existência para cada uma das sucessões de termo geral

   a) $\frac{1}{(-1)^n n^2 + 2}$

   b) $(1 + (-1)^n)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

   c) $\frac{n(1+(-1)^n)}{2}$

   d) $\frac{2n^2 + (-1)^n}{n^2 - 1}$

   e) $\frac{n + \cos(n)}{2n - 1}$

   f) $\left(-1 - \frac{1}{n}\right)^n$

4. Mostre que se (u_n) é uma sucessão convergente tal que $u_{2n} \in]0,1[$ e $u_{2n+1} \in \mathbb{R}\setminus]0,1[$ então $\lim u_n \in \{0,1\}$.

5. Considere a sucessão real (u_n) definida por recorrência por:

$$\begin{cases} u_1 = a, \\ u_{n+1} = (-1)^n u_n + \frac{u_n}{n+1}, \end{cases}$$

com $a \in \mathbb{R}$. Mostre que se (u_n) é convergente então $\lim u_n = 0$.

6. Identifique os conjuntos dos sublimites em $\mathbb{R}$ (e em $\overline{\mathbb{R}}$) da sucessão:

(a) de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n} + 2\cos n\pi$,

(b) (u_n) tal que $u_n = 0$ se n é par, $u_n = n$ se n é ímpar.

(c) $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$

(d) $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Será possível o conjunto dos sublimites em $\mathbb{R}$ de uma sucessão (u_n) ser um conjunto singular e (u_n) ser divergente? Justifique. E se os sublimites e a convergência da sucessão forem considerados em $\overline{\mathbb{R}}$? (Sugestão: veja um dos casos acima).

7. (Teste 12/11/05) Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |2x+1| < |x|\}, \quad B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}_1 \right\},$$

$$C = [-1, +\infty[.$$

a) Mostre que $A = \left]-1, -\frac{1}{3}\right[$.

b) Indique (caso existam em $\mathbb{R}$), $\inf C$, $\min(C \setminus A)$, $\sup(A \setminus \mathbb{Q})$, $\max(A \cup B)$, $\inf B$, $\max(B \setminus \mathbb{Q})$.

c) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é verdadeira ou falsa:

(i) Toda a sucessão decrescente de termos em A é convergente.

(ii) Toda a sucessão decrescente de termos em A é convergente para um elemento de A.

(iii) Toda a sucessão estritamente crescente em C é divergente.

(iv) O conjunto dos sublimites de qualquer sucessão de termos em B é não-vazio.

(v) O conjunto dos sublimites de qualquer sucessão de termos em B está contido em $\{-1, 0\}$.

8. (Exame de 1/3/2001) Considere os conjuntos definidos por:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+1}{x-2} \geq x \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log(2x^2 + x) \geq 0 \right\}.$$

a) Identifique o conjunto A, e mostre que $B =]-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$:

$$\min A, \quad \sup B \cap \mathbb{Q}, \quad \inf A \cap B, \quad \sup B \cap \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Q}, \quad \max A \cap \mathbb{Q}^-.$$

c) Mostre que, se (x_n) é uma sucessão crescente em $A \cap B \cap \mathbb{R}^-$, então (x_n) é convergente.

d) Mostre que, se (x_n) é uma sucessão em $B \cap \mathbb{R}^+$, então a sucessão (y_n) dada por $y_n = (-1)^n x_n$ é divergente.

e) Dê um exemplo de uma sucessão (x_n) de irracionais em A que convirja para um elemento do complementar de A.

9. (Exame 19/1/2000) Sejam A e B os conjuntos considerados no Exercício 2, Aula 3, $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $B = \left\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_1\right\}$. Diga, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras. Para as que forem falsas forneça um contra-exemplo:

   a) Toda a sucessão de termos em A que seja limitada é convergente.

   b) Qualquer sucessão monótona de termos em $A \cap V_{1/2}(0)$ tem limite real.

   c) Qualquer sucessão de termos em $A \cup B$ que seja estritamente decrescente tem limite em $\mathbb{R}_0^+$.

10. (Exame de 30/11/2002) Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ (Ex.6 - Aula 3):

$$A = \left\{x : |x^2 - 2| \leq 2x + 1\right\} = \left[-1 + \sqrt{2}, 3\right], \quad C = \left\{\frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

Indique, justificando, se cada uma das proposições seguintes é verdadeira ou falsa:

   (i) Toda a sucessão monótona de termos em A é convergente.

   (ii) Existem sucessões (a_n) de termos em $\mathbb{R} \setminus A$ convergentes e tais que $a_{n+1}a_n < 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   (iii) Seja (a_n) uma sucessão de termos em C. Então qualquer subsucessão de (a_n) é convergente.

11. Prove, recorrendo à definição de limite em $\overline{\mathbb{R}}$ que

   a) $1 - \sqrt{n} \to -\infty$.

   b) $\frac{n^2+1}{n} \to +\infty$.

12. Determine, se existirem, os limites em $\overline{\mathbb{R}}$ das sucessões que têm por termo de ordem n:

a) $\frac{n^n}{1000^n}$
b) $n^{n+1} - n^n$
c) $3^n - (2n)!$
d) $(n! - n^{1000})^n$
e) $\frac{(2n)!}{n!}$
f) $\sqrt[n]{\frac{n+2}{n+1}}$
g) $\frac{n^{1000}}{1.0001^n}$
h) $\sqrt[n]{\frac{n}{n^2+1}}$
i) $\sqrt[n]{3^n + 2}$
j) $\sqrt[n]{n!}$,
k) $\left(2 - \frac{1}{n}\right)^n$
l) $\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^n}$
m) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

13. (Exercício II.5 de [1]) Determine, se existirem, os limites em $\overline{\mathbb{R}}$ das sucessões que têm por termo de ordem n:

a) $\frac{2n+3}{3n-1}$,
b) $\frac{n^2-1}{n^4+3}$,
c) $\frac{2^n+1}{2^{n+1}-1}$,
d) $\frac{n^3+1}{n^2+2n-1}$,
e) $\frac{(-1)^n n^3+1}{n^2+2}$,
f) $\frac{n^p}{n!}$ $(p \in \mathbb{N}_1)$,
g) $\sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$,
h) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^3}$,
i) $\frac{3^n}{n^2}$,
j) $\sqrt[n]{\frac{n^2+n-1}{n+3}}$,
k) $\sqrt[n]{2^n + 1}$,
l) $\sqrt[n]{(n+1)! - n!}$,

m) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$,

n) $\left(1-\frac{1}{n!}\right)^{n!}$,

o) $\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2}$.

14. Decida sobre a existência dos seguintes limites em $\mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{R}}$, calculando os seus valores nos casos de existência:

    a) $\lim \frac{n!}{n^{1000}}$,

    b) $\lim \frac{(2n)!+2}{(3n)!+3}$,

    c) $\lim \frac{(2n)!}{(2n)^n}$,

    d) $\lim \frac{(n!)^2}{(2n)!+2}$,

    e) $\lim \frac{2^n n!}{n^n}$,

    f) $\lim \frac{3^n n!}{n^n}$,

    g) $\lim n^{\frac{1}{n}}$,

    h) $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$,

    i) $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{n}$,

    j) $\lim \left(2-\frac{1}{n}\right)^{n}$,

    k) $\lim \left(\frac{n-1}{2n^2+1}\right)^{\frac{2}{n}}$,

    l) $\lim \frac{2^{(n^2)}}{15^n}$.

15. a) Mostre que:

    i) se $u_n \to +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$ então $\frac{1}{u_n} \to 0$,

    ii) se $u_n > 0$ e $u_n \to 0$ então $\frac{1}{u_n} \to +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$.

    b) Será verdade que $u_n \to 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{u_n} \to +\infty \vee \frac{1}{u_n} \to -\infty\right)$?

<u>Outros exercícios</u>: 1.22, 1.23, 1.25, 1.27, 1.29, 1.32, 1.33, 1.42, 1.44, 1.46, 1.51, 1.52 de [2].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.

Cálculo Diferencial e Integral I

MEC [1º Semestre, 2010/2011]

#06

1. Determine funções inversas das seguintes funções, especificando os respectivos domínios (e contradomínios):

   a) $f(x) = e^{x^2-2}$, $x > 0$,

   b) $f(x) = 2\operatorname{sen} x$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

   c) $f(x) = \cos(2x)$, $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

   d) $f(x) = \operatorname{tg}(x-1)$, $x \in]1-\frac{\pi}{2}, 1+\frac{\pi}{2}[$.

2. Identifique $\arccos 0$, $\arccos 1$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

3. Exprima as soluções da equação $\operatorname{sen} x = a$ em termos de $\operatorname{arcsen} a$. Faça o mesmo para a equação $\cos x = a$ em termos de $\arccos a$ e para $\operatorname{tg} x = a$ em termos de $\operatorname{arctg} a$.

4. Deduza as seguintes identidades:

   a) $\cos(\arccos x) = x$,

   b) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$,

   c) $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$,

   d) $\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$,

   e) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ para $x \neq \pm 1$,

   f) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, para $x \neq 0$.

5. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função injectiva e $g : f(D) \to D$ a sua inversa (ou seja, $g(y) = x$ sse $y = f(x)$, para quaisquer $x \in D$, $y \in f(D)$). Mostre que

   a) Se f é crescente/decrescente, então g é crescente/decrescente.

   b) Se f é ímpar, então g é ímpar.

   c) arcsen, arctg são crescentes e ímpares, arcos é decrescente.

6. Determine o domínio das funções seguintes:

   a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$,

   b) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$,

c) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$,

d) $f(x) = \log(\log x)$,

e) $f(x) = \log(1 - x^{\frac{3}{2}})$,

f) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$,

g) $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$,

h) $f(x) = \operatorname{arcsen}(e^x)$,

i) $f(x) = \log(1 - \operatorname{arcsen} x)$.

7. (Exercício 3.17 de [2]) Mostre que se (u_n) é uma sucessão monótona, $(\operatorname{arctg} u_n)$ é uma sucessão convergente.

8. Mostre, recorrendo à definição de continuidade, que as funções definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = |x|$ são contínuas em qualquer $x \in \mathbb{R}$.

9. Seja (x_n) uma sucessão real, com $\lim x_n = 1$, $x_n > 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Calcule, se existir, $\lim f(x_n)$ nos casos seguintes:

   a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

   b) $f(x) = \log x$, $x > 0$.

   c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, para $x \neq 1$.

10. (Exercício 3.5 de [2]) Seja $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$). Supondo que existe uma sucessão (x_n) de termos em $[a, b]$ tal que $\lim \phi(x_n) = 0$, prove que ϕ tem pelo menos um zero em $[a, b]$.

11. (Exercício 3.14 de [2]) Sendo $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, mostre que:

    a) Não existe nenhuma sucessão (x_n) de termos em $[0, 1]$ tal que $g(x_n) = n$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

    b) Se existir uma sucessão (x_n) de termos em $[0, 1]$ tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, então existe $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$.

12. (Exercício III.2 de [1]) Para cada uma das funções definidas pelas expressões seguintes, determine os pontos de continuidade e descontinuidade:

    a) $\frac{x+1}{x^3+x}$;

    b) $\frac{x+1}{x^4+3x^3+2x^2}$;

    c) $\sqrt{x} - \frac{1}{x^2+x}$;

    d) $\operatorname{sen}\left(\cos\sqrt{1-x^2}\right)$;

    e) $\cos\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

f) $\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{cotg} 2x}$;

g) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$;

h) $\frac{|x^2-1|}{x^2-1}$;

i) $\sqrt{-\operatorname{sen}^2 x}$;

13. (Exercício 3.15 de [2]) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto 1, em que ponto(s) será necessariamente contínua a função $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$? Justifique.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto 0. Em que ponto(s) será necessariamente contínua a função $g(x) = f(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)$? (Relembre que $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$).

15. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xd(x)$, em que $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função de Dirichlet, é apenas contínua em $x = 0$.

16. Use a definição de limite de função em $\overline{\mathbb{R}}$ para mostrar que

    a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$,

    b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$,

    c) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

17. Determine, se existir, cada um dos seguintes limites, justificando o cálculo ou a não existência de limite.

    a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$,

    b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$,

    c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x}$,

    d) $\lim_{x\to 0} \left[x^2(1-\cos\frac{1}{x})\right]$,

    e) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$,

    f) $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$,

    g) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

18. (Exercício 3.20 de [2]) Calcule

    a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2}$,

    b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x \arccos x}$.

<u>Outros exercícios</u>: 3.3, 3.8, 3.9, 3.10, 3.12, 3.13 de [2].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.

Cálculo Diferencial e Integral I

MEC [1º Semestre, 2010/2011]

#07

1. (Exercício 3.18 de [2]) Suponha que para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, a função f verifica a condição
$$f\left(-\frac{1}{n}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{n}\right).$$
Se existirem os limites laterais $f(0^-)$ e $f(0^+)$ quanto valerá a sua soma? Se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$ qual será o seu valor? Justifique as respostas.

2. (Exercício 3.26 de [2]) Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por
$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}\, d(x),$$
onde $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ designa a função de Dirichlet.
   a) Indique o contradomínio de f. A função é majorada? E minorada?
   b) Estude $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.
   c) Em que pontos é f contínua?

3. (Exercício 3.27 de [2]) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua no ponto 1, dada por
$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \leq -1\,, \\ \operatorname{arcsen} x\,, & \text{se } -1 < x < 1\,, \\ K \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,, & \text{se } x \geq 1\,. \end{cases}$$
   a) Determine K.
   b) Estude f do ponto de vista da continuidade.
   c) Indique o contradomínio de f e se tem supremo, ínfimo, máximo, mínimo.
   d) Quais são os limites $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to +\infty}$, caso existam?

4. (Exercício 3.34 de [2]) Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:
$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 + e^{1-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$
   a) Mostre que φ é contínua em qualquer ponto de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   b) Calcule os limites laterais de φ no ponto 0, e indique, justificando, se φ é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda nesse ponto (por definição, uma função é contínua à esquerda (direita) num ponto a do seu domínio D sse a sua restrição a $]-\infty, a] \cap D$ ($[a, +\infty[\cap D$) é contínua em a).

c) Calcule $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$.

d) Indique, justificando, o contradomínio de φ.

5. (Exercício 3.29 de [2])

a) Estude, quanto à continuidade em cada ponto do seu domínio, as funções definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pelas fórmulas:

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\,, \qquad \psi(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\,.$$

b) Indique, justificando, se cada uma das funções φ e ψ é prolongável por continuidade ou descontínua no ponto 0.

c) Mostre que ϕ e ψ são funções limitadas.

6. (Exercício 3.32 de [2]) Considere a função f definida (no conjunto dos pontos para os quais a expressão $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ designa um número real) pela fórmula

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}.$$

a) Indique, sob a forma de uma reunião de intervalos disjuntos, o domínio de f.

b) Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)\,.$$

c) Justificando a resposta, indique o contradomínio de f.

d) Dê exemplos de sucessões (u_n) e (v_n), de termos no domínio de f tais que (u_n) e $(f(v_n))$ sejam convergentes e (v_n) e $(f(u_n))$ sejam divergentes.

7. (Exercício 3.33 de [2]) Considere as funções f e g definidas em $]0, +\infty[$ pelas expressões

$$f(x) = \log\log(1+x) \qquad\qquad g(x) = \sqrt{x} \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$$

a) Estude f e g quanto à continuidade.

b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

c) Indique, justificando, se cada uma das funções é prolongável por continuidade ao ponto 0.

d) Indique, justificando, o contradomínio de f.

8. (Exercício 3.36 de [2]) Seja f, a função real definida por,

$$f(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}\,, & \text{se } x < 0\,, \\ \log \frac{1}{1+x^2}\,, & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Justifique que f é contínua em todo o seu domínio.

c) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

d) Sendo g a função que resulta de f por prolongamento por continuidade ao ponto 0, justifique que g tem máximo e mínimo em qualquer intervalo da forma $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon > 0$. Indique, justificando, o valor de $\max\{g(x) : x \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$.

9. (Exercício 3.40 de [2])

a) Sendo $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ contínua no seu domínio, mostre que a função

$$\varphi(x) = g(1 - x^2)$$

tem máximo e mínimo.

b) Se na alínea a) considerássemos g definida e contínua em $]0, +\infty[$ poderíamos continuar a garantir para φ a existíncia de máximo e mínimo? Justifique.

10. (Exercício 3.43 de [2]) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a, b[$ tal que

$$\lim_{x\to a} g(x) = -\lim_{x\to b} g(x) = -\infty.$$

Mostre que existe uma e uma só função contínua h definida em $[a, b]$ tal que

$$h(x) = \operatorname{arctg}[g(x)^2],\ x \in]a, b[$$

e determine o seu contradomínio. Justifique a resposta.

11. (Exercício III.11 de [1]) Mostre que a equação $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $]0, \pi[$.

12. (Exercício III.15 de [1]) Considere uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, e suponha que existem e são finitos os limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

a) Prove que f é limitada.

b) Supondo que o produto dos dois limites indicados é negativo, indique justificando, o máximo da função

$$g(x) = \frac{1}{1 + [f(x)]^2}.$$

13. (Exercício IV.1 de [1]) Calcule as derivadas das funções:

a) $\operatorname{tg} x - x$,

b) $\frac{x+\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$,

c) $e^{\operatorname{arctg} x}$,

d) $e^{\log^2 x}$,

e) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x$,

f) $x^2(1 + \log x)$,

g) $\cos(\operatorname{arcsen} x)$,

h) $(\log x)^x$,

i) $x^{\operatorname{sen} 2x}$,

j) $\sqrt{1 - x^2}$,

k) $\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}$.

14. Derive:

a) $\operatorname{arctg} x^4 - (\operatorname{arctg} x)^4$,

b) $(\operatorname{sen} x)^x$,

c) $\log \log x$,

d) $\frac{\operatorname{sen} \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$,

e) $(\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcsen} x}$.

15. (Exercício IV.3 de [1]) para cada uma das seguintes funções determine o domínio de diferenciabilidade e calcule as respectivas derivadas:

a) $x|x|$,

b) $e^{-|x|}$,

c) $\log |x|$,

d) $e^{x-|x|}$.

Outros exercícios: 3.19, 3.21, 3.22, 3.23, 3.28, 3.34, 3.37, 3.38, 3.42 de [2].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.

Cálculo Diferencial e Integral I

MEC [1º Semestre, 2010/2011]

#08

1. (Exercício 4.9 de [2]) Determine o domínio, o domínio de diferenciabilidade e calcule a derivada das seguintes funções:

   a) $\log(x \operatorname{sh} x)$ (ver Ex. 11),

   b) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg} x)$,

   c) $\frac{e^x}{1+x}$.

2. Calcule, se existirem, as derivadas laterais no ponto 0 da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

3. (Exercício 4.2 de [2]) Determine as derivadas laterais no ponto 0 da função f contínua em $\mathbb{R}$ e cujos valores para $x \neq 0$ são dados por

$$f(x) = x\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}}, \quad x \neq 0.$$

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   a) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R}/\{0\}$, calcule f' para $x \neq 0$ e mostre que $\lim_{x\to 0} f'(x)$ não existe.

   b) Justifique que f é diferenciável no ponto 0 e calcule $f'(0)$.

5. Sejam f e g duas funções em $\mathbb{R}$ tais que f é diferenciável em $\mathbb{R}$, verifica $f(0) = f(\pi) = 0$, e g é dada por $g(x) = f(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} f(x)$. Obtenha o seguinte resultado:

$$g'(0) + g'(\pi) = f'(0) + f'(\pi).$$

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável. Calcule $(\operatorname{arctg} f(x) + f(\operatorname{arctg} x))'$.

7. Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, considere a função $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = e^{g(\log x)}$. Supondo conhecidos os valores de g, g' e g'' em pontos convenientes, determine $\varphi'(1)$ e $\varphi''(e)$.

8. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4 e^{-x}$ para todo o x, e sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, calcule $(g \circ f)'(x)$ em termos da função g'

9. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função vezes diferenciável e estritamente monótona, com $g(0) = 2$ e $g'(0) = \frac{1}{2}$. Considere $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = g(\operatorname{arcsen} x)$.

   a) Justifique que f é diferenciável em $]-1, 1[$ e calcule $f'(0)$.

   b) Justifique que f é injectiva e, sendo f^{-1} a sua inversa, calcule $(f^{-1})'(2)$.

10. (Exame de 14-6-06) Considere uma função $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ uma função vezes diferenciável e bijectiva, tal que $f(2) = 0$ e $f'(2) = 2$. Seja g a função definida por
$$g(x) = \operatorname{arcos}(f(x)).$$

   a) Justifique que g é injectiva e diferenciável e, sendo sendo g^{-1} a função inversa de g determine $g'(2)$ e $(g^{-1})'(\frac{\pi}{2})$.

   b) Determine o domínio de g^{-1} e justifique que g^{-1} não tem máximo nem mínimo. Será g^{-1} limitada ?

11. As funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico definem-se da forma
$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

   a) Deduza as igualdades (comparando-as com as correspondentes para funções trigonométricas):

      i) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

      ii) $\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$

      iii) $\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

      iv) $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$

      v) $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$

   b) Verifique que a função sh é ímpar, e a função ch é par.

   c) Calcule $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x, \lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x, \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x, \lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x$.

   d) Estude $\operatorname{sh} x$ e $\operatorname{ch} x$ quanto à continuidade e diferenciabilidade. Calcule $(\operatorname{sh} x)'$ e $(\operatorname{ch} x)'$.

   e) Estude $\operatorname{sh} x$ e $\operatorname{ch} x$ quanto à intervalos de monotonia e extremos e esboçe os respectivos gráficos.

f) As funções inversas das funções hiperbólicas $\operatorname{sh} x$ e $\operatorname{ch} x$ designam-se, respectivamente por argsh e argch, isto é, $x = \operatorname{sh} y$ sse $y = \operatorname{argsh} x$, $y \in \mathbb{R}$, e $x = \operatorname{ch} y$ sse $y = \operatorname{argch} x$, $y \in \mathbb{R}^+$. Deduza

$$\operatorname{argsh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \qquad \operatorname{argch} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Calcule $(\operatorname{argsh} x)'$ e $(\operatorname{argch} x)'$.

12. (Exercício 4.27 de [2]) Seja $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_1.$$

Diga se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa. Justifique as respostas.

a) Para qualquer $n \geq 2$, a função f tem necessariamente máximo no intervalo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$.
b) A função f é necessariamente limitada.
c) A função f' tem necessariamente infinitos zeros.

13. Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável e o seu gráfico cruza a recta $y = x$ em três pontos, então f'' tem pelo menos um zero.

14. Prove que a equação $3x^2 - e^x = 0$ tem exactamente três zeros.

Outros exercícios: 4.5, 4.6, 4.10, 4.11, 4.12, 4.17 de [2].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.

Cálculo Diferencial e Integral I

MEC [1º Semestre, 2010/2011]

#09

1. (Exercício 4.32 de [2]) Prove que se $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ é diferenciável e satisfaz $f(n) = (-1)^n$, para $n \in \mathbb{N}$, então a sua derivada não tem limite no infinito.

2. (Exercício 4.36 de [2]) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e cuja derivada é uma função crescente. Mostre que a função definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ é crescente em $\mathbb{R}^+$. (Sugestão: Aplique o Teorema de Lagrange a f num intervalo adequado para mostrar que $g'(x) \geq 0$.)

3. Prove que se f é de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e a equação $f(x) = x^2$ tem três soluções, sendo uma negativa, uma nula e outra positiva, então f' tem pelo menos um zero.

4. (Exercício IV.7 de [1]) Determine intervalos de monotonia, extremos locais e extremos absolutos (se existentes) para as funções:

   a) $\frac{x}{x^2+1}$,
   b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$,
   c) $|x^2 - 5x + 6|$,
   d) $x \log x$,
   e) e^{-x^2},
   f) $\frac{e^x}{x}$,
   g) xe^{-x},
   h) $\operatorname{arctg} x - \log \sqrt{1 + x^2}$.

5. (Exame 23-7-2000) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$.

   a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.
   c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.
   d) Determine, justificando, o contradomínio de f.

6. (Exame 15-1-2003) Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} e^x + \alpha x + \beta & \text{se } x \leq 0 \\ \operatorname{arctg}\left(e^x + e^{-x} - 1\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

onde α e β são constantes reais.

   a) Determine α e β sabendo que g tem derivada finita em $x = 0$. (Se não conseguir responder a esta pergunta, use $\alpha = -1$ e $\beta = 4$ nas alíneas seguintes.)

   b) Determine $\lim_{x\to-\infty} g(x)$, $\quad \lim_{x\to+\infty} g(x)$.

   c) Estude g quanto à diferenciabilidade e calcule g' nos pontos onde existir.

   d) Estude g quanto à existência de extremos e intervalos de monotonia.

   e) Determine o contradomínio de g.

7. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$.

   a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.

   c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.

   d) Determine, justificando, o contradomínio de f.

8. (Exame 9-1-06) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} |x|.$$

   a) Calcule ou mostre que não existem: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a derivada f'.

   c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo relativo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.

   d) Determine o contradomínio da restrição de f ao intervalo $]-\infty, 0]$.

9. (Exame 23-1-06) Seja g uma função diferenciável tal que $g(0) = g'(0) = 0$ e g' é uma função estritamente monótona. Define-se

$$\varphi(x) = 2 \operatorname{tg}\left(g(x)\right) - g(x).$$

   Mostre que $\varphi(0)$ é um extremo local de φ.

10. (Exercício 4.48 de [2]) Seja f uma função definida numa vizinhança de zero $V_\varepsilon(0)$, diferenciável em $V_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ e tal que $xf'(x) > 0$ para todo $x \in V_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$.

a) Supondo que f é contínua no ponto 0, prove que $f(0)$ é um extremo de f e indique se é máximo ou mínimo. No caso de f ser diferenciável em 0 qual será o valor de $f'(0)$?

b) Mostre (por meio de um exemplo) que sem a hipótese da continuidade de f no ponto 0 não se pode garantir que $f(0)$ seja um extremo de f.

11. (Exercício IV.12 de [1]) Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$,

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x+e^x)}{x}$,

c) $\lim_{x\to 1}(\log x \cdot \log\log x)$,

d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$,

e) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{x}$,

f) $\lim_{x\to 1^+} x^{\log\log x}$,

g) $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$.

12. (Exercício 4.59 de [2]) Determine os limites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{10^x - 5^x}{x}$,

b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$.

13. (Exercício 4.61 de [2]) Determine os limites:

a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x}{x^2}$,

b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2^x}{x^2}$.

14. (Exercício 4.63 de [2]) Calcule os limites

a) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$,

b) $\lim_{x\to +\infty} (\log x)^{\frac{1}{x}}$.

15. (Exercício 4.66 de [2]) Calcule os limites

a) $\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$,

b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

16. (Exercício 4.78 de [2]) Calcule $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}$. (Sugestão: determine primeiro $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$.)

17. a) Determine a fórmula de MacLaurin e a fórmula de Taylor relativa ao ponto 1, ambas de ordem 2 com resto de Lagrange, das funções seguintes: e^{2x}, $\log(1+x)$, $\cos(\pi x)$.

b) Para a fórmula de MacLaurin, determine estimativas para o erro cometido ao aproximar a função dada pelo polinómio de MacLaurin obtido no intervalo $]0,1[$.

18. Determine $e^{0,1}$ com erro inferior a 10^{-4}, sem usar a calculadora.

19. (Exercício 4.83 de [2]) Prove, usando a fórmula de MacLaurin com resto de Lagrange, que se tem

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{6}, \quad \text{para } x \in [0,1].$$

20. Sejam f uma função 3 vezes diferenciável e g definida por $g(x) = f(e^x)$. Dado que o polinómio de Taylor de ordem 2 de f relativo ao ponto 1 é $3 - x + 2(x-1)^2$, determine o polinómio de MacLaurin de ordem 2 de g.

21. (Exercício 4.83 de [2]) Prove, recorrendo à fórmula de MacLaurin, que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica a condição

$$f^{(n)}(x) = 0, \quad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R}$$

então f é um polinómio em x de grau menor do que n.

22. Seja $I \in \mathbb{R}$ um intervalo aberto e uma função $f \in C^2(I)$. Use a fórmula de Taylor para mostrar que, para qualquer $a \in I$,

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

23. (Exercício 4.90 de [2]) Seja f uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$ e considere a função g definida por $g(x) = xf(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Se g'' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e $g''(0) = 0$, prove que $f(0)$ é mínimo absoluto de f.

    (**Sugestão**: Escreva a fórmula de MacLaurin de 1ª ordem de g e use-a para determinar o sinal de $f(x) - f(0)$).

24. Determine os extremos da função $f(x) = \text{arctg}(x^2)$, classificando-os, e determine os seus pontos de inflexão. Esboce o gráfico da função .

25. (Exercício 4.109 de [2]) Faça um estudo da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 e^{-x}$ tendo em conta monotonia, extremos, pontos de inflexão, contradomínio. Esboce o gráfico da função .

26. (Exercício 4.126 de [2]) Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin x}$ em $[0, 2\pi]$ (pode admitir que não existem pontos de inflexão).

Outros exercícios: 4.23, 4.24, 4.27, 4.31, 4.44, 4.45, 4.56, 4.58, 4.69, 4.74, 4.77, 4.82 de [2].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.

Cálculo Diferencial e Integral I

MEC [1º Semestre, 2010/2011]

#10

1. Determine uma primitiva de cada uma das funções:

a) $2x^2 + 3x^3$, b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$, c) $\dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}$,

d) $\sqrt[3]{1-x}$, e) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}}{x}$, f) $2x\sqrt[5]{x^2-1}$,

g) $\dfrac{x^3}{3+x^4}$ h) $\dfrac{e^x}{1+2e^x}$, i) $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$,

j) $\sin(2x)$, k) $\dfrac{\sin(2x)}{1+\operatorname{sen}^2 x}$, l) $\cos^2 x$,

m) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$, n) $\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$, o) $x\cos(x^2+2)$,

p) $e^x \operatorname{sen}(e^x)$, q) $x^2\sqrt[3]{1+x^3}$, r) $\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$,

s) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$, t) $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$, u) $\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$,

v) $\dfrac{x^3}{(1+x^4)^2}$, w) $\cos^3 x\sqrt{\operatorname{sen} x}$, x) $\operatorname{tg}^2 x$,

2. (Exercício IV.22 de [2]) Determine uma primitiva de cada uma das funções:

a) $(x^2+1)^3$, b) e^{x+3}, c) 2^{x-1},

d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}$, e) $\dfrac{x}{1+x^2}$, f) $\dfrac{x^3}{x^8+1}$,

g) $\operatorname{cotg} x$ h) $3^{\sin^2 x}\sin 2x$, i) $\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,

j) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, k) $\dfrac{x}{(1+x^2)^\alpha}$, l) $\cos x\cos 2x$,

m) $\operatorname{sen}^3 x\cos^4 x$, n) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^4 x$.

3. Calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $\sqrt{2x}+\sqrt{\dfrac{x}{2}}$, b) $3\operatorname{sen} x+2x^2$, c) $\dfrac{x^2}{1+x^3}$,

d) xe^{-x^2}, e) $\dfrac{3\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$, f) $x\sqrt{1+x^2}$,

g) $e^{2\operatorname{sen} x}\cos x$, h) $\dfrac{1}{1+e^x}$, i) $\operatorname{tg} x$,

j) $\dfrac{1}{2+x^2}$, k) $\operatorname{tg} x \sec^3 x$, l) $\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x$,

m) $\dfrac{1}{(1+x^2)\arctan x}$, n) $\dfrac{x}{1+x^4}$, o) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$,

p) $\dfrac{1}{1+3x^2}$, q) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+4}$, r) $\sqrt{\dfrac{\arcsin x}{1-x^2}}$,

s) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x^4}}$, t) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$, u) $\dfrac{1}{(x+1)^2}$,

v) $\dfrac{\cos(\log x)}{x}$, w) $\dfrac{1}{x\log x}$, x) $\sec^4 x$.

4. (Exercício IV.23 de [1]) Determine as funções que verificam as condições impostas em cada uma das alíneas seguintes:

a) $f'(x)=\frac{1}{4+9x^2}$, $x\in\mathbb{R}$; $\quad f(0)=1$.

b) $g'(x)=\frac{1}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $\quad g(0)=0, g(2)=3$.

c) $h'(x)=\sec^2 x$, para x no dominio de $\sec x$; $\quad h(k\pi)=k$, $k\in\mathbb{Z}$.

5. (Exercício 5.5 de [2]) Para cada uma das funções definidas pelas expressões

$$x\sin(x^2), \qquad \frac{e^x}{2+e^x}, \qquad \frac{1}{(1+x^2)(1+\operatorname{arctg}^2 x)}$$

determine se possível:

a) uma primitiva que se anule no ponto $x=0$;

b) uma primitiva que tenda para 0 quando $x\to+\infty$.

6. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais (todas imediatamente primitiváveis):

a) $\dfrac{1}{1-x}$, b) $\dfrac{1}{(x-3)^3}$, c) $\dfrac{x+1}{x^2+1}$,

d) $\dfrac{x}{1+(x-1)^2}$, e) $\dfrac{2x+1}{x^2+4}$, f) $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$.

7. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais:

a) $\dfrac{1}{x^2+x}$, b) $\dfrac{x+1}{x(x-1)^2}$, c) $\dfrac{x^2+x-4}{x(x^2+4)}$,

d) $\dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$, e) $\dfrac{x^5}{x^2-1}$, f) $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)^2}$,

g) $\dfrac{x^3+2x^2+2x}{(x+1)^2}$, h) $\dfrac{x^4}{x^4-1}$, i) $\dfrac{x^3+4x^2-4x}{x^4-16}$.

8. Determine *todas* as primitivas de cada uma das funções do exercício anterior (nos respectivos domínios).

9. (Exercício 5.16 de [2]) Determine

   a) Uma expressão geral das primitivas da função definida em $\mathbb{R}$ por
$$f(x) = (x+1)e^{x^2+2x}.$$

   b) A primitiva G, da função
$$g(x) = \frac{x+3}{x^4-x^2}$$
definida no intervalo $]1,+\infty[$ e que verifica a condição $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 3$.

10. (Exercício 5.3 de [2]) Determine uma funç ao F definida em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ que obedece às seguintes condições:
$$F'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \qquad F(2) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 10.$$

11. (Exercício 5.12 de [2]) Determine a função $\psi :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ que satisfaz as condições
$$\forall_{x>-1}\ \psi''(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \psi(0) = \psi'(0) = 1.$$

Outros exercícios: 5.2, 5.4, 5.7, 5.14, 5.17, 5.20 de [2].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.

Cálculo Diferencial e Integral I

MEC [1º Semestre, 2010/2011]

#11

1. (Exercício IV.25 de [1]) Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

   a) xe^x, b) $x \operatorname{arctg} x$, c) $\arcsin x$,
   d) $x \sin x$, e) $x^3 e^{x^2}$, f) $\log^3 x$,
   g) $x^n \log x,\ n \in \mathbb{N}$, h) $\dfrac{x^7}{(1-x^4)^2}$.

2. Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

   a) $e^x(e^x + x)$, b) $e^x \operatorname{sen} x$, c) $x^3 e^{-x^2}$,
   d) $\arctan x$, e) $\sqrt{x} \log x$ f) $x(1+x^2) \arctan x$,
   g) $\dfrac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}$, h) $\log\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)$, i) $x^2 \log^2 x$,
   j) $\log^2 x$, k) $\dfrac{1}{x^3} \cos \dfrac{1}{x}$, l) $\cos 2x \log(\operatorname{tg} x)$,
   m) $3x\sqrt{1-x^2} \arcsin x$, n) $\dfrac{\log x}{(1+x)^2}$, o) $\operatorname{ch} x \cos x$,
   p) $3^x \cos x$, q) $\cos(\log x)$, r) $\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$.

3. a) Usando o método de primitivação por partes, mostre que, para $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, tem-se:

   $$P\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^k}\right) = \frac{1}{2(1-k)}\left(\frac{x}{(1+x^2)^{k-1}} - P\left(\frac{1}{(1+x^2)^{k-1}}\right)\right).$$

   b) Justifique que, para $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$,

   $$P\left(\frac{1}{(1+x^2)^k}\right) = -\frac{1}{2(1-k)}\frac{x}{(1+x^2)^{k-1}} + \left(1 + \frac{1}{2(1-k)}\right) P\left(\frac{1}{(1+x^2)^{k-1}}\right).$$

   (Sugestão: $\frac{1}{(1+x^2)^k} = \frac{1}{(1+x^2)^{k-1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$).

   c) Utilize a alinea anterior para calcular

   $$P\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right), \qquad P\left(\frac{1}{(1+x^2)^3}\right).$$

4. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, utilizando substituições apropriadas:

a) $\dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}$, b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^4})}$, c) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$,

d) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$, e) $\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(1+e^x)}$, f) $\dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$,

g) $\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$, h) $\dfrac{\log x}{x(\log x-1)^2}$, i) $\dfrac{1}{x+\sqrt[3]{x^2}}$,

5. (Exercícios 5.21, 5.23, 5.24, 5.26, 5.28, 5.31 de [2]) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, utilizando substituições apropriadas:

a) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}$, b) $\dfrac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}$, c) $\dfrac{1}{1+e^{2x}}$,

d) $\dfrac{e^{3x}}{(1+e^{2x})(e^x-1)^2}$, e) $\dfrac{2\log x-1}{x\log x(\log x-1)^2}$, f) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x\cos x}$.

6. Determine, usando a substituição indicada, uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

a) $\sec x,\ t=\operatorname{sen} x$, b) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}},\ x=\sec t$,

c) $\sqrt{1-x^2},\ x=\operatorname{sen} t$ d) $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x+\cos x},\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$,

e) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^4},\ x=\cos t$, f) $\dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{1-e^x}},\ t=\sqrt{1-e^x}$,

g) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x},\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$, h) $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}},\ x=\operatorname{sen}^2 t$,

i) $\dfrac{3\operatorname{sen} x+3}{\cos x+\operatorname{sen} 2x},\ t=\operatorname{sen} x$, j) $\sec^3 x,\ t=\operatorname{sen} x$,

k) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ x=\operatorname{tg} t$, l) $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos^2 x},\ t=\operatorname{sen} x$,

m) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}},\ t=\sqrt{1-x^2}$, n) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}},\ t=\sqrt{1+e^x}$,

o) $\sqrt{4+x^2},\ x=2\operatorname{tg} t$, p) $\dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-1}},\ x=\sec t$.

7. (Exercício 5.21 de [2]) Determine, ou justifique que não existem, funções que verifiquem as seguintes condições:

a) $f'(x)=\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

b) $g'(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}$, $x>16$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$.

8. (Exercício 5.24 de [2]) Determine, ou justifique que não existem, funções que verifiquem as seguintes condições:

a) $f''(x) = (1 + \sin x)\cos x,\ f'(0) = 0,\ f(0) = 3.$

b) $g'(x) = \frac{1}{1+e^{2x}},\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1.$

9. Determine, utilizando métodos de primitivação adequados, uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $|x|$,
b) $x \arcsin \dfrac{1}{x}$,
c) $\operatorname{sen}(\log x + 1)$,
d) $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$,
e) $\sqrt{x} \arctan \sqrt{x}$,
f) $\dfrac{1 + \log^2 x}{x\,(1 + \log x)}$,
g) $\dfrac{e^{-x}}{e^{2x} - 2e^x + 2}$,
h) $\dfrac{1 + x}{1 + \sqrt{x}}$,
i) $\cos^3 x$,
j) $\cos^4 x$,
k) $x \log \dfrac{1 - x}{1 + x}$,
l) $\dfrac{1}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$,
m) $\dfrac{\log(\log x)}{x \log x}$,
n) $\log(x + \sqrt{x})$,
o) $\dfrac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$,
p) $\cos x \log(1 + \sin^2 x)$,
q) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$,
r) $x \operatorname{arctg}^2 x$,
s) $\dfrac{\log(1 + x)}{\sqrt{1 + x}}$,
t) $\dfrac{1}{\sin x}$,
u) $\dfrac{x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$,
v) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + 3\cos^2 x}$,
w) $\log(\cos x) \operatorname{tg} x$,
x) $\dfrac{1}{(x + 1)\sqrt{x + 2}}$,
y) $(\operatorname{arcsen} x)^2$,
z) $\dfrac{1}{\cos x(1 - \operatorname{sen} x)}$.

10. Determine uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifique as condições seguintes:

$$\varphi''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}\,, \quad \lim_{x\to-\infty} \varphi'(x) = -1\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Outros exercícios (resolvidos): 5.22, 5.25 , 5.32 de [2]

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.

Cálculo Diferencial e Integral I

MEC [1º Semestre, 2010/2011]

#12

1. (Exercício VI.1 de [1]) Considere a função f definida no intervalo $[0,2]$ por
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1[\\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 3 & \text{se } x \in]1,2] \end{cases}$$
   (a) Mostre que para toda a decomposição do intervalo $[0,2]$, as somas superior $S_d(f)$ e inferior $s_d(f)$ verificam $s_d(f) \leq 4 \leq S_d(f)$.

   (b) Recorrendo directamente à definição, mostre que f é integrável e que $\int_0^2 f(x)dx = 4$.

2. (a) Sendo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, mostre que f^2 é integrável. (Sugestão: Considere $f \geq 0$; o caso geral segue de $f^2 = |f|^2$).

   (b) Sendo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis, justifique que fg é integrável. (Sugestão: $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$.)

3. (Exercício VI.3 de [1]) Prove que, se f é contínua em $[a,b]$ e g é integrável e não negativa em $[a,b]$, existe $c \in]a,b[$ tal que
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

4. (Exercício VI.7 de [1]) Mostre que se f é contínua em $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)dx = 0$, existe pelo menos uma raiz da equação $f(x) = 0$ no intervalo $[a,b]$.

5. (Exercício 6.10 de [2]) Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$, prove que se é nulo o integral de f em qualquer intervalo limitado, então $f(x) = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

   Dê um exemplo de uma função integrável e com integral nulo em qualquer intervalo limitado e que não verifique $f(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

6. (Exercício 6.13 de [2]) Calcule $\phi'(x)$ sendo $\phi(x) = \int_x^3 x^2 e^{\operatorname{sen} t}\, dt$.

7. Determine as derivadas das funções seguintes:
$$\text{a) } \int_1^x \sin(t^2)\, dt, \qquad \text{b) } \int_x^{2\pi} \cos(t^2)\, dt,$$
$$\text{c) } \int_x^{2x} e^{t^2}\, dt, \qquad \text{d) } \int_x^{x^2} e^{-t^2}\, dt, \qquad \text{e) } \int_{x^2}^{x^4} \sin(\sqrt{t})\, dt.$$

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\psi(t) = \int_0^x (x-t) f(t) dt$. Justifique que ψ é duas vezes diferenciável e calcule $\psi''(x)$.

9. (Exercício 6.9 de [2]) Mostre que se f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ verificando a condiçaõ

$$\int_0^x f(t)\, dt = x f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

então f é uma função constante. (Sugestão: derive ambos os membros da igualdade anterior).

10. Mostre que a função seguinte não depende de x:

$$\psi(x) = \int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

11. (Exercício 6.16 de [2]) Calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3\, dt}{x^4}.$$

12. Calcule os limites:

$$\text{a) } \lim_{x \to +\infty} x \int_{\pi/2}^{\arctan x} \sin(t^2)\, dt, \qquad \text{b) } \lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} t e^{\sqrt{t}}\, dt}{\int_0^{x^3} (e^{\sqrt[3]{t}} - 1)\, dt}.$$

13. (Exercício 6.53 de [2]) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e tal que $f(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$.

    (a) Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule $F'(x)$.

    (b) Mostre que F é estritamente crescente e que, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $xF(x) > 0$.

    (c) Prove que se f tem limite positivo quando $x \to +\infty$, então $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$. Mostre, por meio de exemplos, que se for $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, então $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ pode ser finito ou $+\infty$.

14. (Exercício 6.46.c) de [2]) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt & \text{se } x \neq 0 \\ f(0) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Prove que F é contínua em $\mathbb{R}$ e diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; mostre que, nas condições indicadas, F pode não ser diferenciável em 0.

15. (Exercício VI.15 de [1]) Sejam u e v funções contínuas em $\mathbb{R}$ e tais que, para cada $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^x u(t)\, dt = \int_b^x v(t)\, dt,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que $u = v$ e $\int_a^b u(t)\, dt = 0$.

16. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis em qualquer intervalo limitado e a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} &\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ &\int_{-x}^{x} g(t)\,dt = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Mostre que se f é par e g é ímpar então verificam (1).

b) Mostre que se f e g são contínuas e verificam (1) então f é par e g é ímpar.

c) Forneça exemplos de funções f e g que verificam (1) e que não sejam par nem ímpar, respectivamente.

Outros exercícios (resolvidos): 6.4, 6.6, 6.12, 6.17, 6.19, 6.20, 6.55 de [2].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.

Cálculo Diferencial e Integral I

MEC [1º Semestre, 2010/2011]

#13

1. Calcule

$$\text{a)} \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{b)} \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{c)} \int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x}\,dx \qquad \text{d)} \int_{-1}^{1} \operatorname{tg} x.$$

2. Calcule

$$\text{a)} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \log x\,dx, \qquad \text{b)} \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} \arctan x\,dx,$$

$$\text{c)} \int_0^1 \log(1+\sqrt{x})\,dx, \qquad \text{d)} \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,dx,$$

$$\text{e)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx, \qquad \text{f)} \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx.$$

3. (Exercícios 6.23, 6.24, 6.26, 6.32 de [2]) Calcule

$$\text{a)} \int_1^{\pi} x \operatorname{arctg} x\,dx, \qquad \text{b)} \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx, \qquad \text{c)} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x\,dx,$$

$$\text{d)} \int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx, \qquad \text{e)} \int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\,dx, \qquad \text{f)} \int_0^1 \frac{1}{e^t+e^{2t}}\,dt$$

4. (Exercício V.9 de [1]) Sendo $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} e^{\frac{t^2+1}{t}}\,dt$, $x > 0$, mostre que

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x).$$

5. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Define-se $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ através da expressão $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} f(tx)\,dt$. Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}^+$, e mostre que

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(xF(x) + \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad x > 0.$$

(**Sugestão:** considere a mudança de variável $tx = y$.)

6. Mostre que, para qualquer $x > 0$,

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_{1/x}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

(**Sugestão:** use uma substituição de variável adequada.)

7. Considere a função $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Mostre que

$$\int_0^1 F(x)\,dx = F(1)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2e}.$$

(**Sugestão:** use integração por partes.)

8. (Exercício 6.45 de [2]) Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diz-se periódica de período $T>0$, sse $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(x+T)$. Mostre que, se f é contínua e periódica de período $T>0$, então

   (a) $G(x)=\displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,dt$ é uma função constante em $\mathbb{R}$.

   (b) Sendo F uma primitiva de f, F será também periódica de período T sse $\int_0^T f(t)\,dt=0$.

9. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

   a) $f(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$,

   b) $g(x)=\int_2^{e^x} \frac{1}{\log t}\,dt$,

   c) $h(x)=\int_1^x (x-t)e^{t^2}\,dt$.

10. Considere a função

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^{2x}-e^x}{x}, & \text{se } x\neq 0,\\ 0, & \text{se } x=0.\end{cases}$$

   a) Justifique integrabilidade da função f, em qualquer intervalo limitado de $\mathbb{R}$.

   b) Definindo $\Psi(x)=\int_0^x f(s)\,ds$, justifique que se trata de uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, e calcule $\Psi'(x), x\in\mathbb{R}$.

11. Considere a função de variável real definida por $\psi(x)=\int_{x^2}^{x}\frac{|t|e^{-t^4}}{1+t^2}\,dt$.

   a) Calcule os zeros e o sinal de ψ;

   b) Mostre que $\psi(x)\le \frac{1}{2}\max_{t\in[0,1]}\log\left(\frac{1+t^2}{1+t^4}\right), \forall_{x\in\mathbb{R}}$.

12. (Exercício 6.49 de [2]) Supondo que f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que, para qualquer $x\in\mathbb{R}$, $f(x)<0$ e $f'(x)<0$, considere a função g definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x)=\int_0^{x^2-4x+3} f(t)\,dt.$$

   (a) Determine os intervalos em que g é monótona, os seus pontos de máximo ou de mínimo e as raizes da equação $g(x)=0$. Estude ainda o sentido da concavidade do gráfico de g.

(b) A função g é majorada? E minorada?

13. (Exercício 6.56 de [2]) Considere a função $f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt$.

    (a) Determine o seu domínio e mostre que f é par.

    (b) Mostre ainda que é diferenciável e calcule a sua derivada.

    (c) Mostre que existe $a > 0$ tal que f é monótona e limitada em $]0, a[$. Que pode concluir da existência de $\lim_{x\to 0} f(x)$?

14. (Exercício 6.51 de [2]) Sendo $\phi(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$, se $x \neq 0$ e $\phi(0) = 0$, considere a função $g(x) = \int_0^x \phi(t)\, dt$.

    (a) Justifique que g é ímpar.

    (b) Determine $g'(x)$, para $x \neq 0$ e ainda $g'(0)$.

    (c) Indique as abcissas dos pontos onde o gráfico de g tem tangente horizontal. Justifique que g é estritamente crescente.

    (d) Justifique que g é limitada.

15. (Exercício V.14 de [1]) Considere a função $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2} \log t\, dt.$$

    a) Calcule $\phi(2)$.

    b) Mostre que ϕ é diferenciável e calcule $\phi'(x)$.

    c) Estude ϕ do ponto de vista do crescimento e mostre que há um só ponto $c > 0$ tal que $\phi(c) = 0$.

16. Calcule as áreas de cada uma das seguintes regiões do plano:

    a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq |x|\}$,

    b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq x,\ y \geq x^3,\ y \leq 4x\}$,

    c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \log x \wedge x \leq a\}$, $a > 1$.

17. (Exercício V.11 de [1]) Calcule a área limitada pelas linhas de equações:

    a) $y = 9 - x^2$ e $y = x^2$,

    b) $y^2 = 4(1 - x)$ e $y^2 = 2(2 - x)$,

    c) $x^2 y = 1$, $y = -27x$, e $x = -8y$,

    d) $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = \sqrt{x}$,

    e) $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, e $y = x^2$,

    f) $y = e^x$, $y = 1 - x$, $x = 1$.

18. Calcule a área limitada pela elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

19. (Exercício 6.61 de [2]) Calcule a área de região plana definida pelas condições $x^2 + y^2 \leq 4$ e $y \geq \sqrt{3}x^2$.

20. (Exercício 6.62 de [2]) Calcule a área de região do plano limitada prlo gráfico da função $y = \operatorname{arctg} x$ e pelas rectas de equação $x = 1$ e $y = 0$.

21. (Exercício 6.63 de [2]) Calcule a área de região plana consitituída pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que satisfazem as condições seguintes:

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}, \qquad y \geq \frac{\pi}{16}x^2, \qquad y \leq \operatorname{arctg} x.$$

22. (Exercício 6.70 de [2]) Calcule a área da região do plano limitada pelas curvas de equações

$$y = \log x, \qquad y = \log^2 x.$$

Outros exercícios (resolvidos): 6.35, 6.39, 6.48, 6.57, 6.60, 6.68, 6.71, 6.76, 6.79a) de [2].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.

Cálculo Diferencial e Integral I

MEC [1º Semestre, 2010/2011]

#14

1. Para cada uma das seguintes séries, estude a sua convergência, calculando, se possível, a sua soma.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^n \pi^{-2n}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$,

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\right)$,

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \pi^{-n+2}$,

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-1)^n}{4^n}$,

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$,

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-n+1}}{2^{-n+1}}$,

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}$,

l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}+1}{3^n}$,

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}$,

n) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2+(-1)^n)2^{-n}$,

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}(n)$,

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

2. Determine a natureza das seguintes séries usando critérios de convergência apropriados: :

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+n^2+1}}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+n!}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-4}{n^4-1}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1-2^n}$,

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+\sqrt{n}}\right)^n$,

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{1+3^n}$, h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}$, i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^3}$,

j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^6-1}}$, l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n\sqrt{n}+1}$, m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1000)^n}{n!}$,

n) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n}$, o) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$, p) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-1}$,

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$, r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$, s) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$.

3. (Exercício II.14 de [1]) Determine a natureza das seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+4}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{e^n}$, d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^2+2^n}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$, f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$, h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{1000}}{(1.001)^n}$,

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$, j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n+1}\sqrt[4]{n+2}}$,

k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2n)!]^2}{n!(3n)!}$, l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^3$.

4. (Exercício 2.13 de [2]) Determine a natureza de cada uma das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n!}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n.$$

5. (a) Determine a natureza das séries

i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$, ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n}$, iii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\log n}$, iv) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log n}$.

(Sugestão: Utilize o critério do integral para i) e ii) e o critério de comparação para iii) e iv).)

(b) Justifique que as séries

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha} n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \log n}$$

divergem para $\alpha \leq 1$ e convergem para $\alpha > 1$.

6. (a) Justifique que se f é uma função tal que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = L \in \mathbb{R}^+,$$

então, para qualquer sucessão $a_n \geq 0$ com $a_n \to 0$, as séries $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ têm a mesma natureza.

(b) Determine a natureza das séries seguintes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^{\alpha}}} - 1\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

7. (Exercício 2.15 de [2]) Sendo (a_n) o termo geral de uma sucessão de termos positivos, indique, justificando, a natureza das séries

$$\sum (1 + a_n), \qquad \sum \frac{1}{n^2 + a_n}.$$

8. (Exercício 2.17 de [2]) Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos e (b_n) uma sucessão limitada.

   a) Mostre que a convergência da série $\sum a_n$ implica a convergência da série $\sum a_n b_n$.

   b) Use o resultado anterior para provar que se a série $\sum a_n$ converge então tambem converge $\sum a_n^2$.

   c) Mostre, por meio de um contraexemplo, que a recíproca da proposição anterior é falsa.

9. Determine a natureza das séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1+n}{n}\right)$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3 + 2}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{3000}}{3^n}$, d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$.

10. (Exercício II.17 de [1]) Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as séries:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1},$$
$$\text{c)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+2}, \qquad \text{d)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}.$$

11. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguinte séries convergem absolutamente, simplesmente ou divergem:

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty},\frac{(x+2)^n}{(n+2)2^n}$$
$$\text{c)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^{3n}}{n+1}, \qquad \text{d)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n},$$

12. (Exame 9-1-2006) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(nx)^n}{(n+1)^n}.$$

13. (Exame 23-1-2006) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(x-1)^n}{n!+1}.$$

14. (Exercícios 2.34, 2.35, 2.43, 2.44 de [2]) Determine para que valores reais de x são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes e divergentes as séries

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n^2+1}, \qquad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{x-2}{x}\right)^n,$$
$$\text{d)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n+1}, \qquad \text{e)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{1+8^n}(x-1)^n.$$

15. (Exercício II.18 de [1]) Determine os intervalos de convergência das séries seguintes, indicando em que pontos é cada série simplesmente ou absolutamente convergente:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n+1}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+a)^n}{a^{n+1}}$, e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+1)^{2n}}{n^2+1}$.

16. (Exercício 2.50 de [2]) Suponha que a série de potências de x

$$\sum a_n x^n$$

é convergente no ponto -3 e divergente no ponto 3:

a) Indique, justificando, se a convergência da série no ponto -3 é simples ou absoluta.

b) Indique o conjunto dos valores de x para os quais a série é absolutamente convergente e o conjunto dos valores de x para os quais a série é divergente.

c) Dê um exemplo de uma série que verifique as condições requeridas no enunciado.

17. Calcule a soma e o domínio de convergência das séries seguintes:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!3^n} x^n$,

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x+1)^{2n+1}$, d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} x^{4n}$.

18. Desenvolva as seguintes funções em série de Taylor no ponto a, indicando o menor intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. Aproveite para determinar as respectivas derivadas de ordem n em a.

a) $f(x) = e^{2x+1}, \quad a = 0,$ b) $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}, \quad a = 0,$

c) $f(x) = \cos(x+1)^2, \quad a = -1,$ d) $f(x) = \log x, \quad a = 2,$

e) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt, \quad a = 0,$ f) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t^2\,dt, \quad a = 0,$

g) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}, \quad a = 0,$ h) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}, \quad a = 1,$

i) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2, \quad a = 0,$ j) $f(x) = \log(x^2+1), \quad a = 0.$

19. (Exercício IV.16 de [1]) Quando possível, desenvolva em série de Mac-Laurin as funções:

    a) $x^3 + 1,$ b) $\log x,$ c) $\log(x+3),$

    d) $\dfrac{1}{(1-x)^3},$ e) $\dfrac{1}{x(x-1)},$ f) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)},$

    g) $\dfrac{1}{\sqrt{x}},,$ h) $x \operatorname{arctg} x,$ i) $\operatorname{sen} x \cos x,$

    Para os desenvolvimentos que não for possível obter, explique a razão desse facto; para os que tiver obtido, indique o intervalo em que representam a função considerada.

20. (Exercício IV.17 de [1]) Questão análoga à anterior, sendo os desenvolvimentos em série de Mac-Laurin substituídos por desenvolvimentos em série de Taylor relativa ao ponto 1 e as funções a desenvolver substituídas por:

    a) $x^2 - x + 1,$ b) $\dfrac{1}{x},$ c) $e^x,$

    d) $x \log x,$ e) $\dfrac{x}{(x+1)^2},$ f) $x^{-2}(x-1)^2,$

    g) $x^2(x-1)^{-2},$ h) $x \log(x-1),$ i) $\sqrt[3]{x-1},$

21. Considere a função $f(x) = \dfrac{x^4}{1-2x}.$

    (a) Desenvolva f em série de potências de x e indique um intervalo aberto no qual a função coincide com a série obtida.

    (b) Utilize o desenvolvimento em série encontrado para determinar $f^{(n)}(0)$ e justifique que f tem um mínimo local em 0.

22. (Exercício 4.158 de [2]) Desenvolva em série de potências de $x-1$ a função $f(x)=(x-1)e^x$ e indique os pontos em que a soma da série obtida é igual ao valor da função. Aproveitando o desenvolvimento obtido, calcule $f^{(n)}(1)$.

23. (Exercício 4.146 de [2])

    (a) Determine o raio de convergência da série de potências $\sum \frac{(x-1)^n}{3^n\sqrt{n}}$ e indique, justificando, em que pontos é que a série converge absolutamente.

    (b) Supondo que a função g é definida pela igualdade

    $$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n\sqrt{n}}$$

    no conjunto de todos os pontos onde a série é convergente, calcule $g(1)$ e $g''(1)$ e escreva a série de Taylor no ponto 1 da função $x+g'(x)$.

24. (Exercício 4.154 de [2]) Desenvolva em série de MacLaurin a função $\phi(x)=x\log(1+x^3)$ e aproveite o desenvolvimento para justificar que a função tem um mínimo no ponto 0 (mostre que $\phi'(0)=\phi''(0)=\phi'''(0)=0$ e observe o sinal de $\phi^{(4)}(0)$).

25. Desenvolva a função

    $$\phi(x)=\int_0^{x^2}\log(1+t^2)\,dt$$

    em série de MacLaurin, indicando o menor intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. Decida se ϕ tem um extremo em 0; em caso afirmativo, classifique-o.

Outros exercícios: 2.8, 2.11, 2.18, 2.19, 2.20, 2.25, 2.27, 2.33, 2.46, 2.51, 4.142, 4.145, 4.152, 4.156 de [2].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8a ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.