Nome Número

NOTAS	
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
TOTAL	

AMII Exame 2

Sábado, 20 de Dezembro, 2003, 14:00–16:00

Instruções: Resolva todas as questões nestas páginas, utilizando a parte detrás se necessário. Não é permitida a utilização de máquinas de calcular. Por favor pare de escrever e entregue o exame quando lhe for pedido.

Problema 1. (3 pontos)

Seja $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(a) Calcule o gradiente de f no ponto $(3, 4)$.

(b) Calcule aproximadamente $\sqrt{(2.95)^2 + (4.05)^2}$.

(c) Calcule a derivada direccional de f no ponto $(3, 4)$ na direcção do vector $(1, 1)$.

Problema 2. (3 pontos)

Seja $f(x,y) = y^2 - yx^2 + y$.

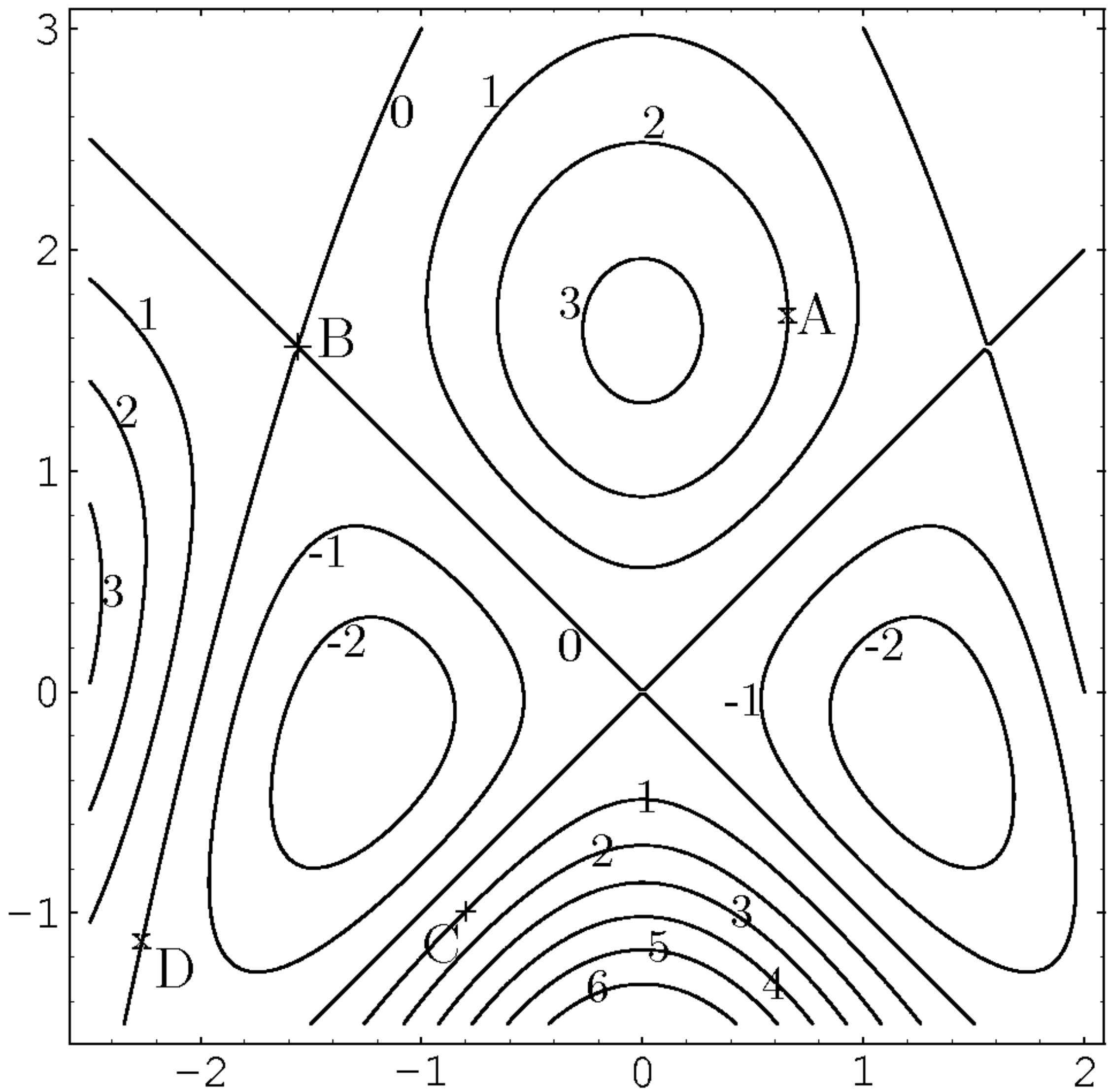
(a) Encontre os pontos críticos de f.

(b) Classifique os pontos críticos de f.

(c) Seja R a região do plano definida por $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \leq 0$ (a metade inferior do disco de raio 1). Qual o valor máximo de f em R? **Sugestão:** a certa altura poderá ser conveniente escrever f como função apenas de y, eliminando a variável x.

Problema 3. (3 pontos)

A figura seguinte representa as curvas de nível duma certa função diferenciável $f(x, y)$:



(a) Indique na figura com um ponto M a posição aproximada dum máximo relativo de f.

(b) Desenhe na figura a direcção do gradiente de f no ponto D.

(c) Para cada derivada indicada escolha o seu valor entre a lista de valores abaixo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \underline{\qquad} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = \underline{\qquad} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(B) = \underline{\qquad} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(C) = \underline{\qquad} \quad \left(\vec{u} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$-7.7 \qquad -3.1 \qquad -1.2 \qquad 0 \qquad 1.2 \qquad 3.1 \qquad 7.7$

Problema 4. (3.5 pontos)

Seja $F(x, y, z) = z^3 + 4xz^2 + y^2 z$.

(a) Escreva a equação do plano tangente à superfície $F(x, y, z) = 2$ no ponto $(0, 1, 1)$.

(b) Use o teorema da função implícita para mostrar que a equação $F(x, y, z) = 2$ define $z(x, y)$ como função de x e de y numa vizinhança do ponto $(0, 1, 1)$.

(c) Seja $z(x, y)$ a função da alínea (b). Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ no ponto $(0, 1, 1)$.

(d) Seja $w = x + \sin y^2 + z^2$. Usando o resultado da alínea (c) (ou doutra maneira) calcule $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ no ponto $(0, 1, 1)$.

Problema 5. (3 pontos)

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(a) Calcule a derivada de f

(b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável tal que $g(0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $Dg = [\frac{1}{2}]$. Calcule $D(f \circ g)$ no ponto 0.

(c) Calcule aproximadamente o valor de $f \circ g$ no ponto 0.1

Problema 6. (1 ponto)

Um bloco de gelo rectangular derrete ao sol. A sua altura decresce a uma taxa de $2cm/hora$ e a sua largura e o seu comprimento decrescem ambos à taxa de $3cm/hora$. Calcule a taxa de variação do volume quando a altura é igual a $5cm$ e a largura e o comprimento são ambos iguais a $10cm$.

Problema 7. (2 pontos)

Seja $f(x,y) = \frac{x^6-y^6}{x^2+y^2}$. f é diferenciável (não precisa de mostrar isto).

(a) Mostre que a origem é um ponto crítico de f.

(b) Classifique a origem quanto a ser máximo, mínimo ou ponto de sela.

Problema 8. (1.5 pontos)

Seja S uma superfície definida por $f(x,y,z) = 0$, f diferenciável. Seja $g(x,y,z)$ uma função diferenciável cujo valor máximo na superfície S é atingido num ponto $P \in S$.

(a) Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável cuja imagem está contida em S e com $\gamma(0) = P$. Mostre que $\gamma'(0)$ é perpendicular a $\nabla g(P)$. Sugestão: derive $g \circ \gamma$.

(b) Mostre que os vectores ∇f e ∇g são paralelos. Este resultado é conhecido como o método dos multiplicadores de Lagrange.