

PROBLEMAS PARA A AULA PRÁTICA, SEMANA 11

Exercício 1. Encontre todos os pontos de estacionaridade das seguintes funções e classifique-os:

- (1) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + 3$
- (2) $f(x, y) = 6x - x^3 - y^3$
- (3) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$
- (4) $f(x, y) = x^3 + 6xy + 3y^2 - 9x$
- (5) $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 2y^3 + 12x - 24y$
- (6) $f(x, y) = 4xy - 2x^4 - y^2$
- (7) $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + y^2 - 12x + 10$
- (8) $f(x, y) = xy e^{-x^2 - y^2}$
- (9) $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{1 - x^2 - y^2}$

Exercício 2. Para cada uma das funções seguintes mostre que a origem é um ponto de estacionaridade e classifique-o:

- (1) $f(x, y) = x^4 + y^4$
- (2) $f(x, y) = x^3 + y^3$
- (3) $f(x, y) = x^2 y^2$
- (4) $f(x, y) = x^4 - y^6$
- (5) $f(x, y) = x^2 + y^2 - y^4$
- (6) $f(x, y) = e^{-x^4 - y^4}$

Exercício 3. Mostre que a origem é um mínimo local da função $f(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + y^2 + z^2 + \sin(4x^2 y z^3) + xy^2 z^4$. Sugestão: o exercício pode ser feito sem grandes cálculos.

Exercício 4. Determine o desenvolvimento de Taylor de segunda ordem em torno do ponto $(0, 0)$ da função $f(x, y) = x \sin y + y \sin x$. Aproveite o resultado para calcular o valor de a tal que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - axy}{x^2 + y^2} = 0$$

Exercício 5. Seja $f(s, t)$ o quadrado da distância entre um ponto da recta $x = t$, $y = t + 1$, $z = 2t$ e um ponto da recta $x = 2s$, $y = s - 1$, $z = s + 1$. Mostre que o único ponto crítico de f é um mínimo. Interprete o resultado geometricamente.

Exercício 6. Seja $f(x, y)$ o quadrado da distância do ponto $(0, 0, 2)$ a um ponto do gráfico $z = xy$. Calcule e classifique os pontos de estacionaridade de f .