PROBLEMAS PARA A AULA PRÁTICA, SEMANA 14

Exercício 1. *Mostre que a função definida por* $(u, v) = f(x, y)$ *com*

$$u = e^{xy} + 1$$
$$v = e^{xy} + y^2$$

possui, numa bola $B_r(0, 1)$*, uma inversa local de classe* C^1*. Sendo* $g(u, v)$ *esta inversa, calcule* $\frac{\partial g_2}{\partial u}$ *no ponto* $(2, 2)$.

Exercício 2. *Mostre que, numa vizinhança do ponto* $(1, -1, 2)$*, o sistema de equações*

$$\begin{cases} x^2(y^2 + z^2) = 5 \\ (x - z)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

define y *e* z *como funções de* x *de classe* C^1*. Calcule*

$$\frac{dy}{dx}(1) \qquad e \qquad \frac{dz}{dx}(1)$$

Exercício 3. *Mostre que o sistema*

$$\begin{cases} e^{xy} - u + \log(v + x) = 1 \\ x^2 + y^3 + u^2 - v^3 = 0 \end{cases}$$

define implicitamente uma função f *que a cada* $(x, y) \in B_\varepsilon(0, 1)$ *faz corresponder um ponto* $(u, v) = f(x, y) \in B_\delta(0, 1)$ *para certos* $\varepsilon, \delta > 0$*. Calcule* $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 1)$.

Exercício 4. *As funções* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *são definidas por*

$$f(u, v) = (\ x + y + z + \operatorname{sen}(xyz)\ ,\ xyz + \operatorname{sen}(x + y + z)\ )$$
$$g(w) = 1 - e^{u-2v}$$

Mostre que a equação $(g \circ f)(x, y, z) = 0$ *define implicitamente numa vizinhança de* $(0, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *uma função diferenciável* $y = h(x, z)$ *tal que* $h(0, \frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$*. Calcule* $\frac{\partial h}{\partial z}(0, \frac{\pi}{2})$.

Exercício 5. *Sendo* $(u, v) = f(x, y)$ *a função definida implicitamente pelo sistema de equações*

$$\begin{cases} x + y^2 - u^3 + v = 0 \\ x^2 - y + u - v^2 = 0 \end{cases}$$

de uma bola centrada em $(x_0, y_0) = (0, 0)$ *para uma bola centrada em* $(u_0, v_0) = (0, 0)$ *e sendo* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $(u, v) \mapsto (z, w) = (v \cos u, u \operatorname{sen} v)$*, calcule* $\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x}(0, 0)$.