PROBLEMAS PARA A AULA PRÁTICA, SEMANA 12

Exercício 1. *Para cada uma das seguintes funções calcule a derivada direccional máxima no ponto P_0, e indique a respectiva direcção:*

(1) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$, $P_0 = (1,1)$
(2) $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, $P_0 = (1,-2)$
(3) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$, $P_0 = (3,4)$
(4) $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 4z^2$, $P_0 = (1,5,-2)$
(5) $f(x,y,z) = e^{x-y-z}$, $P_0 = (5,2,3)$

Exercício 2. *Calcule* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *sabendo que*

(1) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 1$
(2) $x^3 + y^3 + z^3 = xyz$
(3) $xe^{xy} + ye^{zx} + ze^{xy} = 3$
(4) $x^5 + xy^2 + yz = 5$
(5) $xyz = \operatorname{sen}(x+y+z)$

Exercício 3. *Seja $y(x)$ a função definida implicitamente por $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$ numa vizinhança de $(1,2)$. Escreva o polinómio de Taylor de segundo grau de $y(x)$ em torno do ponto $x = 1$.*

Exercício 4. *Mostre que a equação $z^3 + z - 2e^{x^2+y^2}$ define numa vizinhança do ponto $(0,0,1)$ uma função implícita $z = \phi(x,y)$ com $\phi(0,0) = 1$. Calcule*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,0) \ \text{ e } \ \frac{\partial \phi}{\partial y}(0,0)$$

Exercício 5. *Considere a curva de nível*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

Calcule as derivadas $y'\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ e $y''\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ da função implícita definida por esta equação numa vizinhança do ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Exercício 6. *Mostre que, numa vizinhança do ponto $(1,-1,2)$, o sistema de equações*

$$\begin{cases} x^2(y^2+z^2) = 5 \\ (x-z)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

define y e z como funções de x de classe C^1. Calcule

$$\frac{dy}{dx}(1) \qquad e \qquad \frac{dz}{dx}(1)$$

Exercício 7. *Mostre que o sistema*

$$\begin{cases} e^{xy} - u + \log(v+x) = 1 \\ x^2 + y^3 + u^2 - v^3 = 0 \end{cases}$$

define implicitamente uma função f que a cada $(x,y) \in B_\varepsilon(0,1)$ faz corresponder um ponto $(u,v) = f(x,y) \in B_\delta(0,1)$ para certos $\varepsilon, \delta > 0$. Calcule $\frac{\partial u}{\partial x}(0,1)$.

Exercício 8. *As funções $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são definidas por*

$$f(u,v) = (\ x+y+z+\operatorname{sen}(xyz)\ ,\ xyz + \operatorname{sen}(x+y+z)\ )$$
$$g(w) = 1 - e^{u-2v}$$

Mostre que a equação $(g \circ f)(x, y, z) = 0$ *define implicitamente numa vizinhança de* $(0, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *uma função diferenciável* $y = h(x, z)$ *tal que* $h(0, \frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$. *Calcule* $\frac{\partial h}{\partial z}(0, \frac{\pi}{2})$.

Exercício 9. *Sendo* $(u, v) = f(x, y)$ *a função definida implicitamente pelo sistema de equações*

$$\begin{cases} x + y^2 - u^3 + v = 0 \\ x^2 - y + u - v^2 = 0 \end{cases}$$

de uma bola centrada em $(x_0, y_0) = (0, 0)$ *para uma bola centrada em* $(u_0, v_0) = (0, 0)$ *e sendo* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $(u, v) \mapsto (z, w) = (v \cos u, u \operatorname{sen} v)$, *calcule* $\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x}(0, 0)$.