

PROBLEMAS PARA A AULA PRÁTICA, SEMANA 13

Exercício 1. Para cada uma das seguintes funções calcule a derivada direccional máxima no ponto P_0 , e indique a respectiva direcção:

- (1) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$, $P_0 = (1, 1)$
- (2) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, $P_0 = (1, -2)$
- (3) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, $P_0 = (3, 4)$
- (4) $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 4z^2$, $P_0 = (1, 5, -2)$
- (5) $f(x, y, z) = e^{x-y-z}$, $P_0 = (5, 2, 3)$

Exercício 2. Escreva a equação do plano ou recta tangente à superfície ou curva indicada em P_0 . Indique também uma base do espaço normal.

- (1) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $P_0 = (1, 2, 2)$
- (2) $x^3 + y^3 + z^3 = 5xyz$, $P_0 = (2, 1, 1)$
- (3) $z^3 + (x + y)z^2 + x^2 + y^2 = 13$, $P_0 = (2, 2, 1)$
- (4) $2x^2 + 3y^2 = 35$, $P_0 = 2, 3$
- (5) $x^4 + xy + y^2 = 19$, $P_0 = (2, -3)$
- (6) $xyz + x^2 - 2y^2 + z^3 = 14$, $P_0 = (5, -2, 3)$

Exercício 3. Seja $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y) = \left(\frac{xy}{1 - x^2 - y^2}, \frac{\sqrt{y^2 - x}}{x} \right)$$

Calcule a derivada direccional de F na direcção do vector $\vec{v} = (1, 1)$, no ponto $(1, 2)$.

Exercício 4. Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a função cujas funções coordenadas g_1 e g_2 são definidas por

$$g_1(x, y) = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$g_2(x, y) = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

- (1) Calcule a matriz jacobiana de g num ponto arbitrário $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (2) Calcule a derivada direccional de g na direcção do vector $\vec{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$.

Exercício 5. Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$f(x, y) = \left(e^{-xy^2}, \sin(x + y) \right)$$

- (1) Determine a matriz jacobiana de g num ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- (2) Mostre que, no ponto $(0, \pi)$, a derivada direccional $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}} \neq 0$ em qualquer direcção.