PROBLEMAS PARA A AULA PRÁTICA, SEMANA 4

Exercício 1. *Calcule as seguintes primitivas usando as substituições indicadas:*

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ $\qquad y=\sqrt{x}$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}+e^{x}}\,dx\,,$ $\qquad y=e^{x}$

(3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\,dx\,,$ $\qquad y=\sqrt[4]{x+1}$

(4) $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx\,,$ $\qquad x=\operatorname{tg}\theta$

Exercício 2. *Calcule as seguintes primitivas*

(1) $\displaystyle\int x^2\cosh x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2-4x+5}{(x-1)^2(x^2+1)}$ (3) $\displaystyle\int x^3(16x^2-9)^{-\frac{3}{2}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ (5) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x^2}\,dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$

Exercício 3. *Seja*

$$\varphi(x)=\int_{\cos x}^{x^3+1} e^{-t^2}\,dt$$

Calcule, justificando, $\varphi(0)$ *e* $\varphi'(0)$.

Exercício 4. *Determine a função* f *sabendo que*

$$\int_{e^{-x}}^{e^{x}} f(t)\,dt = x\cosh x-\operatorname{senh} x$$

Exercício 5. *A função gamma é definida, para* $t\geq 1$, *por*

$$\Gamma(t)=\lim_{b\to\infty}\int_0^b x^{t-1}e^{-x}\,dx$$

Pode assumir que este limite existe.

(1) *Mostre que* $\Gamma(t+1)=t\Gamma(t)$
(2) *Calcule* $\Gamma(1)$
(3) *Mostre que* $\Gamma(n+1)=n!$
(4) *Use a substituição* $y=e^{-x}$ *para mostrar que*

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 y^m(\log y)^n\,dy=\frac{n!(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}$$