1. Grupoide fundamental

Seja X um espaço topológico, $x_0, x_1 \in X$, $I = [0,1]$. Então $\mathcal{C}(I, 0, 1;\, X, x_0, x_1)$ é o espaço dos caminhos α tais que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$.

Definição 1.1. Dizemos que dois caminhos α_0, α_1 são homotópicos, e escrevemos $\alpha_0 \sim \alpha_1$, se α_0, α_1 pertencerem à mesma componente conexa por arcos de $\mathcal{C}(I, 0, 1;\, X, x_0, x_1)$, isto é, se

(1) Existir um caminho $h : I \to \mathcal{C}(I, 0, 1;\, X, x_0, x_1)$, com $h(0) = \alpha_0$, $h(1) = \alpha_1$ ($h(t) = \alpha_t$ é então uma família de caminhos interpolando entre α_0 e α_1) ou, equivalentemente,
(2) Existir uma funcção $H : I \times I \to X$ tal que $H(s, 0) = \alpha_0(s)$, $H(s, 1) = \alpha_1(s)$, $H(0, t) = x_0$ e $H(1, t) = x_1$. A continuidade de H é em geral mais fácil de demonstrar que a continuidade de h.

Observação 1.2. Dados espaços topológicos X, Y, $A_1, \ldots, A_n \subset X$, $B_1, \ldots, B_n \subset Y$, denotamos por $\mathcal{C}(X, A_1, \ldots, A_n;\, Y, B_1, \ldots, B_n)$ o espaço das funções contínuas $f : X \to Y$ tais que $f(A_i) \subset B_i$.

Proposição 1.3. *A relação de homotopia de caminhos é uma relação de equivalência.*

Demonstração. As componentes conexas por arcos formam uma partição do espaço topológico $\mathcal{C}(I, 0, 1;\, X, x_0, x_1)$. $\square$

Denotamos a classe de equivalência de caminhos por $[\alpha]$.

Proposição 1.4. *Seja V um espaço vectorial, $K \subset V$ um subconjunto convexo. Então quaisquer dois caminhos α_0, α_1 em K são homotópicos.*

Demonstração. Definimos a homotopia $h(t) = \alpha_t = (1-t)\alpha_0 + t\alpha_1$, ou equivalentemente, $H(t, s) = (1-t)\alpha_0(s) + t\alpha_1(s)$. $\square$

A concatenação de caminhos é preservada por homotopia:

Proposição 1.5. *Sejam α_0, α_1 caminhos de x para y, β_0, β_1 caminhos de y para z tais que $\alpha_0 \sim \alpha_1$ e $\beta_0 \sim \beta_1$. Então $\alpha_0 * \beta_0 \sim \alpha_1 * \beta_1$.*

Demonstração. Se α_t, β_t são as homotopias, então $\alpha_t * \beta_t$ é uma homotopia entre $\alpha_0 * \beta_0$ e $\alpha_1 * \beta_1$. Explicitamente, a homotopia é dada por

$$\alpha_t * \beta_t(s) = H(s, t) = \begin{cases} \alpha_t(2s) & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta_t(2s - 1) & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Pelo lema da colagem, H é contínuo. $\square$

Teorema 1.6. *Sejam α_i caminhos de x_{i-1} para x_i. A concatenação de caminhos tem as seguintes propriedades:*

(1) *Para cada $x \in X$ seja $e_x : I \to X$ o caminho constante $e_x(t) = x$. Então $[\alpha_1] * [e_{x_1}] = [e_{x_0}] * [\alpha_1]$*
(2) *Seja $\bar{\alpha}_1(t) = \alpha_1(1-t)$. Então $[\alpha_1] * [\bar{\alpha}_1] = [e_{x_0}]$ e $[\bar{\alpha}_1] * [\alpha_1] = [e_{x_1}]$.*
(3) $([\alpha_1] * [\alpha_2]) * [\alpha_3] = [\alpha_1] * ([\alpha_2] * [\alpha_3])$

Demonstração. A demonstração é uma consequência directa de I ser convexo:

(1) $[\alpha_1 * e_{x_1}] = [\alpha_1]$:

$$\alpha_1 * e_{x_1}(s) = \begin{cases} \alpha_1(2s) & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \alpha_1(1) = x_1 & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

logo $\alpha_1 * e_{x_1} = \alpha \circ f$ em que

$$f(s) = \begin{cases} 2s & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Como I é convexo, f é homotópico à identidade logo $\alpha_1 * e_{x_1} \sim \alpha_1$.

(2) $[\alpha_1 * \bar{\alpha}_1] = [e_{x_0}]$: seja $\alpha_t(s) = \alpha_1(ts)$. Então $\alpha_0 = e_{x_0}$. Logo $\alpha_t * \bar{\alpha}_t$ é uma homotopia entre $e_{x_0} * e_{x_0} = e_{x_0}$ e $\alpha_1 * \bar{\alpha}_1$.

(3) $([\alpha_1] * [\alpha_2]) * [\alpha_3] = [\alpha_1] * ([\alpha_2] * [\alpha_3])$:

$$(\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3 = \begin{cases} \alpha_1(4s) & \text{se } s \in [0, \frac{1}{4}] \\ \alpha_2(4s-1) & \text{se } s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \alpha_3(2s-1) & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

e

$$\alpha_1 * (\alpha_2 * \alpha_3) = \begin{cases} \alpha_1(2s) & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \alpha_2(4s-2) & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \alpha_3(4s-3) & \text{se } s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

logo $(\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3 = \alpha_1 * (\alpha_2 * \alpha_3) \circ f$ em que

$$f(s) = \begin{cases} 2s & \text{se } s \in [0, \frac{1}{4}] \\ s + \frac{1}{4} & \text{se } s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \frac{s+1}{2} & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Como I é convexo, f é homotópico à identidade logo $(\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3 \sim \alpha_1 * (\alpha_2 * \alpha_3)$. □

Definição 1.7. Um grupoide é uma categoria em que todos os morfismos são invertíveis. O grupoide fundamental é a categoria cujos objectos são os pontos de X e, dados $x_0, x_1 \in X$, os morfismos $Mor(x_0, x_1)$ são as classes de equivalência de caminhos de x_0 para x_1. A composição é dada pela concatenação de caminhos.

Definição 1.8. Para cada $x_0 \in X$ definimos o grupo fundamental por $\pi_1(X, x_0) = Mor(x_0, x_0) = Aut(x_0)$.

Teorema 1.9. *Seja* $[\alpha] \in Mor(x_0, x_1)$. *Então* $[\alpha]$ *induz um isomorfismo* $\tilde{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$.

Demonstração. Seja $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$. Definimos $\tilde{\alpha}([\gamma]) = [\alpha] * [\gamma] * [\bar{\alpha}]$. Então é uma verificação directa que $\tilde{\alpha}$ é um homomorfismo e que $\tilde{\alpha}^{-1}([\delta]) = [\bar{\alpha}] * [\delta] * [\alpha]$. □

Em particular, se X é conexo por arcos, todos os grupos $\pi_1(X, x)$ são isomorfos.

2. Espaços de revestimento

Definição 2.1. Sejam E, B, F espaços topológicos. $p : E \to B$ é um fibrado com fibra F sse, para todo o $x \in B$ existe $U \in \mathcal{V}_x$ e um homeomorfismo $\phi : U \times F \to p^{-1}(U)$ tal que $p \circ \phi$ é a projecção $U \times F \to U$.

Exemplo 2.1. O exemplo mais trivial de fibrado é a identidade $Id : X \to X$.

Exemplo 2.2. $p : B \times F \to B$ é claramente um fibrado

Exemplo 2.3. Seja M^n uma variedade diferenciável de dimensão n, $TM = \bigcup_x T_x M$ o seu espaço tangente. Então $p : TM \to M$ é um fibrado de fibra $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.4. A banda de Moebius X é um fibrado sobre S^1 de fibra I.

Definição 2.2. Um revestimento $p : E \to B$ é um fibrado cuja fibra F tem a topologia discreta.

Exemplo 2.5. $p : \mathbb{R} \to S^1$ dado por $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ é um revestimento de fibra $\mathbb{Z}$.

Antes de prosseguirmos precisamos do lema do número de Lebesgue:

Lema 2.3. *Seja X um espaço métrico compacto, $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de X. Então existe um $\delta > 0$ tal que, para qualquer subconjunto $A \subset X$ de diâmetro menor que δ existe um α tal que $A \subset U_\alpha$.*

Demonstração. Podemos assumir a cobertura é finita: $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$. Seja

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} d(x, U_k^c)$$

e seja $\delta = \frac{1}{n} \min f$. Como $f(x) > 0$ para todo o x, $\delta > 0$. Agora é fácil de ver que se $\operatorname{diam} A < \delta$, então existe um k com $A \subset U_k$. □

Definição 2.4. Dado um fibrado $p : E \to B$ e uma função contínua $f : X \to B$, um levantamento de f é uma função $\tilde{f} : X \to E$ tal que $f = p \circ \tilde{f}$.

Exemplo 2.6. Um campo vectorial $\mathcal{X} : M \to TM$ é um levantemanto da identidade $M \to M$.

Exemplo 2.7. Seja $p : B \times F \to B$ o fibrado trivial. Então, se fixarmos um ponto $y \in F$, dada uma função $f : X \to B$ existe um levantamento $\tilde{f}(x) = (f(x), y)$.

Teorema 2.5. *Seja $p : E \to B$ um espaço de revestimento, $\gamma : I \to B$ um caminho de x_0 para x_1. Então, para cada $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ um levantamento $\tilde{\gamma} : I \to E$ de γ tal que $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ existe e é único.*

Demonstração. Dividimos a demonstração em dois casos:

(1) Primeiro tratamos o caso em que $E = B \times F$. Seja $y_0 = (x_0, z)$, $z \in F$. Para provar existência basta definir $\tilde{\gamma}(s) = (\gamma(s), z)$. Provemos unicidade. Como I é conexo, e F é discreto, a composição $I \xrightarrow{\tilde{\gamma}} B \times F \to F$ é constante logo $\tilde{\gamma}(I) \subset B \times z$. Mas então a equação $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ tem por solução única $\tilde{\gamma}(s) = (\gamma(s), z)$.

(2) Provemos agora o caso geral. Para cada $x \in B$ fixamos $U_x \in \mathcal{V}_x$ e um homeomorfismo $\phi_x : U_x \times F \to p^{-1}(U_x)$. Então $B = \bigcup U_x$ logo $I = \bigcup p^{-1}(U_x)$. Seja δ o número de Lebesgue desta cobertura e seja $0 = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = 1$ uma partição de $[0, 1]$ em intervalos de comprimento menor que δ.

Assumimos, por indução, que $\tilde{\gamma}$ já está definido no intervalo $[0, c_{k-1}]$. Seja x tal que $[c_{k-1}, c_k] \subset \gamma^{-1}(U_x)$, ou seja, $\gamma([c_{k-1}, c_k] \subset U_x$. Então temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} c_{k-1} \arrow[r, "\phi^{-1}\circ\tilde{\gamma}"] \arrow[d] & U_x \times F \arrow[d, "pr"] \\ {[c_{k-1}, c_k]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[ur, dashed, "\phi^{-1}\circ\tilde{\gamma}"] & U_x \end{tikzcd}$$

Por (1), existe um único levantamento $\tilde{\alpha}$ de γ com $\tilde{\alpha}(c_{k-1}) = \phi^{-1} \circ \tilde{\gamma}(c_{k-1})$. Definimos $\tilde{\gamma} = \phi \circ \tilde{\alpha}$.

Assim $\tilde{\gamma}$ fica definido no intervalo $[0, c_k]$. A continuidade segue do lema da colagem. □

Lema 2.6. *Seja $p : E \to B$ um revestimento, $H : I \times I \to B$. Então existe uma única função $\tilde{H} : I \times I \to E$ tal que $\tilde{H}(0,0) = y_0$ e $p \circ \tilde{H} = H$.*

Demonstração. A demonstração é quase idêntica à anterior: divide-se $I \times I$ em quadrados de diâmetro menor de δ, ordenam-se os quadrados com cuidado e define-se $\tilde{H}$ indutivamente, quadrado a quadrado. □

Corolário 2.7. *Seja $p : E \to B$ um revestimento, α, β caminhos em B de x_0 para x_1. Seja $y_0 \in p^{-1}(x_0)$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ os levantamentos de α, β com $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = y_0$.*

(1) *Se $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$ então $\alpha \sim \beta$.*
(2) *Se $\alpha \sim \beta$ então $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ e $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$.*
(3) *Se E é convexo, $\alpha \sim \beta$ sse $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.*

Demonstração.

(1) Seja $\tilde{H} : I \times I \to E$ a homotopia entre $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$. Então $p \circ \tilde{H}$ é uma homotopia entre α e β.
(2) Seja $H : I \times I \to B$ a homotopia entre α e β, $\tilde{H}$ o seu levantamento com $\tilde{H}(0,0) = y_0$. Então
   - $\tilde{H}(s,0)$ é o levantamento de $H(s,0) = \alpha(s)$ logo $\tilde{H}(s,0) = \tilde{\alpha}(s)$
   - $\tilde{H}(s,1)$ é o levantamento de $H(s,1) = \beta(s)$ logo $\tilde{H}(s,1) = \tilde{\beta}(s)$
   - $\tilde{H}(0,t)$ é o levantamento de $H(0,t) = e_{x_0}$ logo $\tilde{H}(0,t) = e_{y_0}$.
   - $\tilde{H}(1,t)$ é o levantamento de $H(1,t) = e_{x_1}$ logo $\tilde{H}(1,t)$ é um caminho constante. Em particular $\tilde{\alpha}(1) = H(1,0) = H(1,1) = \tilde{\beta}(1)$.

   Logo $\tilde{H}$ é uma homotopia entre $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$.
(3) Se E é convexo, quaisquer caminhos enre os mesmos pontos são homotópicos logo $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) \Rightarrow \tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$. □

Teorema 2.8. *Seja $x_0 = (1,0) \in S^1$. Então $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Seja $p : \mathbb{R} \to S^1$ o revestimento $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$. Definimos $\phi : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, x_0)$ por $\phi(n) = [\gamma_n]$ em que $\gamma_n(s) = p(ns)$. Então o levantamento de γ_n começando em $0 \in \mathbb{R}$ é $\tilde{\gamma}_n(s) = ns$.

(1) ϕ é injectiva: se $\gamma_n \sim \gamma_m$, então $n = \tilde{\gamma}_n(1) = \tilde{\gamma}_m(1) = m$.
(2) ϕ é sobrejectiva: dado $[\gamma] \in \pi_1(S^1, x_0)$, seja $\tilde{\gamma}$ o levantamento de γ com $\tilde{\gamma}(0) = 0$. Seja $n = \tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$. Então, $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}_n(1)$, logo $\gamma \sim \gamma_n$. Logo $[\gamma] = \phi(n)$.

(3) ϕ é um homomorfismo: basta mostrar que $\gamma_n * \gamma_m \sim \gamma_{n+m}$. Calculemos o levantamento de $\gamma_n * \gamma_m$:

$$\gamma_n * \gamma_m(s) = \begin{cases} \gamma_n(2s) & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_m(2s-1) & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \begin{cases} p(2ns) & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ p(2ms - m) & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Como $p(2ms-m) = p(2ms-m+n)$, o levantamento de $\gamma_n * \gamma_m$ é a função contínua

$$\widetilde{\gamma_n * \gamma_m}(s) = \begin{cases} 2ns & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2ms + n - m & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Logo $\widetilde{\gamma_n * \gamma_m}(1) = \tilde{\gamma}_{n+m}(1)$ logo $\gamma_n * \gamma_m \sim \gamma_{n+m}$. □

3. Homomorfismo induzido e homotopia

Definição 3.1. Seja $f : X \to Y$, $f(x) = y$. Então definimos $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ por $f_*[\gamma] = [f \circ \gamma]$.

Teorema 3.2. *f_* está bem definido e $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.*

Demonstração. Se $\gamma \sim \gamma'$ então $f \circ \gamma \sim f \circ \gamma'$ logo f_* está bem definido.

$$(f \circ g)_*[\gamma] = [(f \circ g) \circ \gamma] = [f \circ (g \circ \gamma)] = f_*[g \circ \gamma] = f_*(g_*[\gamma])$$ □

Definição 3.3. Seja X um espaço topológico, $A \subset X$, $\imath : A \to X$ a inclusão.

(1) Uma retracção é uma função $r : X \to A$ tal que $r|_A = \mathbb{1}_A$ ou, equivalentemente, $r \circ \imath = \mathbb{1}_A$.
(2) Dizemos que A é um retracto por deformação de X sse existir uma retracção $r : X \to A$ e uma homotopia $h_t : X \to X$ entre $\mathbb{1}_X$ e $\imath \circ r$ tal que, para qualquer t, $h_t|_A = \mathbb{1}_A$.

Teorema 3.4. *Seja X um espaço topológico, $A \subset X$, $x_0 \in A$.*

(1) *Se $r : X \to A$ é uma retracção então r_* é sobrejectiva, $\imath_*$ é injectiva e $\pi_1(A, x_0) \cong \pi_*(X, x_0) \times \operatorname{Ker} r_*$.*
(2) *Se A é um retracto por deformação de X então $\imath_*, r_*$ são isomorfismos inversos um do outro.*

Demonstração.

(1) Isto é um facto standard em álgebra quando se tem uma sucessão exacta

$$1 \longrightarrow \operatorname{Ker} r_* \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \underset{\imath_*}{\overset{r_*}{\rightleftarrows}} \pi_1(A, x_0) \longrightarrow 1$$

tal que $r_* \circ \imath_* = \mathbb{1}$.
(2) Sabemos que $r_* \circ \imath_* = \mathbb{1}$. Mostremos que $\imath_* \circ r_* = \mathbb{1}$. Seja $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$. Então $h_t \circ \gamma$ é uma homotopia entre γ e $\imath \circ r \circ \gamma$ logo $\imath_* \circ r_*[\gamma] = [\gamma]$.

□

Lema 3.5. *Sejam X, Y espaços topológicos, $x \in X$. Sejam $f_0, f_1 : X \to Y$ funções homotópicas, $y_0 = f_0(x)$, $y_1 = f_1(x)$. Seja $\{f_s\}$ uma homotopia. Definimos o* *caminho $\alpha(s) = f_s(x)$ entre y_0 e y_1. Então o diagrama*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x) \arrow[r, "(f_0)_*"] \arrow[dr, "(f_1)_*"'] & \pi_1(Y,y_0) \\ & \pi_1(Y,y_1) \arrow[u, "\tilde{\bar{\alpha}}"] \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, $(f_0)_* = \tilde{\bar{\alpha}} \circ (f_1)_*$.

Demonstração. Seja $[\gamma] \in \pi_1(X,x)$. Definimos $\alpha_t : I \to Y$ por $\alpha_t(s) = \alpha(st)$. Então $\alpha_0 = e_{y_0}$ e $\alpha_1 = \alpha$. Logo $\alpha_t * (f_t \circ \gamma) * \bar{\alpha}_t : (I, 0, 1) \to (Y, y_0)$ é uma homotopia entre $f_0 \circ \gamma$ e $\alpha * (f_1 \circ \gamma) * \bar{\alpha}$ logo $(f_0)_*[\gamma] = \tilde{\bar{\alpha}} \circ (f_1)_*[\gamma]$. □

Corolário 3.6. *Seja $f : X \to X$ homotópica à identidade. Então $f_* : \pi_1(X,x) \to \pi_1(X, f(x))$ é um isomorfismo.*

Definição 3.7. Duas funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ são inversas homotópicas sse $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$ e $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$. Dizemos então que f, g são equivalências homotópicas e que X, Y são homotopicamente equivalentes.

Teorema 3.8. *Se f é uma equivalência homotópica então f_* é um isomorfismo.*

Demonstração. Seja $y_0 = f(x_0)$, $x_1 = g(y_0)$. Consideremos a composição

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, x_1)$$

Como $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$, $g_* \circ f_*$ é um isomorfismo logo f_* é injectiva. De maneira similar concluimos que g_* é injectiva. Mostremos que f_* é sobrejectiva. Seja $[\alpha] \in \pi_1(Y, y_0)$. Seja $[\beta] = g_*[\alpha] \in \pi_1(X, x_1)$, $[\gamma] = (g_* \circ f_*)^{-1}[\beta]$. Então $g_* \circ f_*[\gamma] = [\beta]$. Como g_* é injectiva e $g_* \circ f_*[\gamma] = g_*[\alpha]$ concluimos que $f_*[\gamma] = [\alpha]$. □

4. Acção de $\pi_1(X, x_0)$ na fibra

Definição 4.1. Seja $p : E \to B$ um revestimento de fibra F, $x_0 \in B$, $F_{x_0} = p^{-1}(x_0) \cong F$. Dado $[\gamma] \in \pi_1(B, x_0)$ e $y \in F_{x_0}$ definimos $y \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}(1)$ em que $\tilde{\gamma}$ é o levantamento de γ em y.

Proposição 4.2. *$y \cdot [\gamma]$ está bem definida e é uma acção de $\pi_1(B, x_0)$ em F_{x_0}.*

Demonstração. Se $\gamma \sim \gamma'$, então $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$ logo a acção está bem definida. Sejam $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \pi_1(B, x_0)$. Mostremos que

$$(y \cdot [\gamma_1]) \cdot [\gamma_2] = y \cdot ([\gamma_1] * [\gamma_2])$$

Seja $\tilde{\gamma}_1$ o levantamento de γ_1 em y e seja $\tilde{\gamma}_2$ o levantamento de γ_2 em $\tilde{\gamma}_1(1) = y \cdot [\gamma_1]$. Então $(y \cdot [\gamma_1]) \cdot [\gamma_2] = \tilde{\gamma}_2(1)$. Por outro lado,

$$p \circ (\tilde{\gamma}_1 * \tilde{\gamma}_2) = (p \circ \tilde{\gamma}_1) * (p \circ \tilde{\gamma}_2) = \gamma_1 * \gamma_2$$

logo $\tilde{\gamma}_1 * \tilde{\gamma}_2$ é o levantamento de $\gamma_1 * \gamma_2$ em y. Assim, $y \cdot ([\gamma_1] * [\gamma_2]) = \tilde{\gamma}_1 * \tilde{\gamma}_2(1) = \tilde{\gamma}_2(1)$. □

Proposição 4.3. *Seja E um espaço conexo por arcos. Então a acção de $\pi_1(B, x_0)$ em F_{x_0} é transitiva e dado $y \in F_{x_0}$ o estabilizador de y é dado por $I_y = p_* \pi_1(E, y)$ Assim,*

$$F \cong F_{x_0} \cong \pi_1(B, x_0)/p_* \pi_1(E, y)$$

Demonstração. Mostremos que a acção é transitiva. Sejam $y_0, y_1 \in F_{x_0}$. Então existe um caminho α em E de y_0 para y_1. Seja $\gamma = p \circ \alpha$. Então $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ e α é o levantamento de γ em y_0. Logo $y_0 \cdot [\gamma] = \alpha(1) = y_1$.

Provemos que $I_y \subset p_*\pi_1(E, y)$. Seja $[\gamma] \in I_y$. Então $y \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}(1) = y$ logo $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = y$. Portanto $[\tilde{\gamma}] \in \pi_1(E, y)$ e $[\gamma] = p_*[\tilde{\gamma}]$.

Provemos que $p_*\pi_1(E, y) \subset I_y$. Seja $[\gamma] \in p_*\pi_1(E, y)$. Então $[\gamma] = p_*[\alpha]$, $[\alpha] \in \pi_1(E, y)$, ou seja $\gamma = p \circ \alpha$. Mas então α é o levantamento de γ em y logo $y \cdot [\gamma] = \alpha(1) = y$.

Como a acção é transitiva, a órbita de y é F_{x_0} logo $F_{x_0} \cong \pi_1(B, x_0)/I_y = \pi_1(B, x_0)/p_*\pi_1(E, y)$. $\square$

5. Seifert-van Kampen

Dada uma colecção $\{G_\nu\}$ de grupos, o produto livre $\underset{\nu}{\bigstar}\, G_\nu$ é o conjunto das palavras

$$g_1 \bullet g_2 \bullet \ldots \bullet g_m$$

formadas por elementos $g_i \in G_{\nu_i}$, sujeitas às relações

(1) Sejam $1_\nu \in G_\nu$, $1_\mu \in G_\mu$ as identidades. Então $1_\nu = 1_\mu$
(2) Se $g_1, g_2 \in G_\nu$ então $g_1 \bullet g_2 = g_1 g_2$.

A multiplicação em $\underset{\nu}{\bigstar}\, G_\nu$ é definida da maneira óbvia:

$$(g_1 \bullet g_2 \bullet \ldots \bullet g_m) \bullet (h_1 \bullet \ldots \bullet h_n) = g_1 \bullet g_2 \bullet \ldots \bullet g_m \bullet h_1 \bullet \ldots \bullet h_n$$

Seja $\{U_\nu\}$ uma colecção de abertos tais que $X = \bigcup_\nu U_\nu$. Seja $\gamma \in \Omega(X, x_0)$. Se a imagem de γ estiver contida em U_ν, então γ define um elemento em $\pi_1(U_\nu, x_0)$ que representaremos por $[\gamma]_\nu$.

Vamos definir um homomorfismo $\Phi : \underset{\nu}{\bigstar}\, \pi_1(U_\nu, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Os elementos de $\underset{\nu}{\bigstar}\, \pi_1(U_\nu, x_0)$, são os produtos $[\gamma_1]_{\nu_1} \bullet [\gamma_2]_{\nu_2} \bullet \ldots \bullet [\gamma_m]_{\nu_m}$ com $[\gamma_i]_{\nu_i} \in \pi_1(U_{\nu_i}, x_0)$, em que $\gamma_i \in \Omega(X, x_0)$ são caminhos com imagem contida em U_{ν_i}. Então

$$\Phi\left([\gamma_1]_{\nu_1} \bullet [\gamma_2]_{\nu_2} \bullet \ldots \bullet [\gamma_m]_{\nu_m} \right) = [\gamma_1 * \ldots * \gamma_m]$$

Teorema 5.1 (Seifert-van Kampen)**.** *Assumimos que as intersecções $U_{\mu_1} \cap U_{\mu_2} \cap U_{\mu_3} \cap U_{\mu_4}$ são conexas por arcos.*

Seja $\sim$ a seguinte relação em $\underset{\nu}{\bigstar}\, \pi_1(U_\nu, x_0)$: se $\gamma \in \Omega(X, x_0)$ é um caminho com imagem em $U_\nu \cap U_\mu$, então $[\gamma]_\nu \sim [\gamma]_\mu$.

Então Φ induz um isomorfismo

$$G = \frac{\underset{\nu}{\bigstar}\, \pi_1(U_\nu, x_0)}{\sim} \xrightarrow[\cong]{\Phi} \pi_1(X, x_0)$$

Demonstração. Φ está bem definido no quociente porque $\Phi([\gamma]_\nu) = \Phi([\gamma]_\mu) = [\gamma]$.

(1) Provemos sobrejectividade. Seja $\gamma \in \Omega(X, x_0)$. Seja δ o número de Lebesgue da cobertura $\gamma^{-1}(U_\nu)$ de I. Seja $0 = c_0 < c_1 < \ldots < c_m = 1$ uma partição de I em intervalos de comprimento menor que δ. Seja α_i a curva obtida restringindo γ a $[c_{1-1}, c_i]$. Então a imagem de α_i está contida num U_{μ_i} e $\gamma = \alpha_1 * \ldots * \alpha_m$. Não podemos escrever $[\alpha_i]_{\mu_i} \in \pi_1(U_{\mu_i}, x_0)$ porque a curva não é fechada. Isso resolve-se facilmente: seja

$$x_i = \gamma(c_i) = \alpha_i(1) = \alpha_{i+1}(0) \in U_{\mu_i} \cap U_{\mu_{i+1}}$$

$U_{\mu_i} \cap U_{\mu_{i+1}}$ é conexo por arcos logo existe uma curva δ_i em $U_{\mu_i} \cap U_{\mu_{i+1}}$ unindo x_i a x_0. Escolhamos $\delta_0 = \delta_m = e_{x_0}$. Então

$$\gamma \sim (\bar{\delta}_0 * \alpha_1 * \delta_1) * (\bar{\delta}_1 * \alpha_2 * \delta_2) * \ldots * (\bar{\delta}_{m-1} * \alpha_m * \delta_m)$$

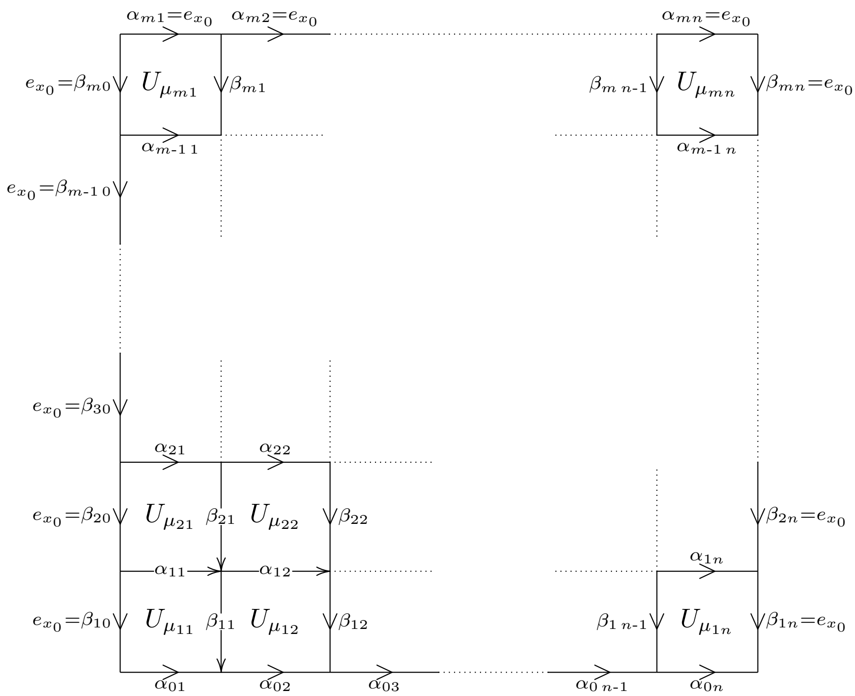
Seja $\tilde{\alpha}_i = \bar{\delta}_{i-1} * \alpha_i * \delta_i$. Então $\tilde{\alpha}_i \in \Omega(X, x_0)$ é uma curva em U_{μ_i} definindo um elemento $[\tilde{\alpha}_i]_{\mu_i} \in \pi_1(U_{\mu_i}, x_0)$. Como $[\gamma] = [\tilde{\alpha}_1 * \ldots * \tilde{\alpha}_m]$,

$$[\gamma] = \Phi\,(\,[\tilde{\alpha}_1]_{\mu_1} \bullet \ldots \bullet [\tilde{\alpha}_m]_{\mu_m}\,)$$

(2) Provemos injectividade. Seja $[\gamma_1]_{\nu_1} \bullet [\gamma_2]_{\nu_2} \bullet \ldots \bullet [\gamma_r]_{\nu_r} \in \operatorname{Ker}\Phi$. Então

$$\Phi\,(\,[\gamma_1]_{\nu_1} \bullet [\gamma_2]_{\nu_2} \bullet \ldots \bullet [\gamma_r]_{\nu_r}\,) = [\gamma_1 * \ldots * \gamma_r] = [e_{x_0}]$$

Existe portanto uma homotopia $H : I \times I \to X$ com $H(t,0) = \gamma_1 * \ldots * \gamma_m(t)$ e $H(t,1) = x_0$. Seja δ o número de Lebesgue da cobertura $H^{-1}(U_\nu)$. Dividimos $I \times I$ em rectângulos de diâmetro menor que δ. Então H leva cada rectângulo num certo $U_{\mu_{ij}}$. A restrição de H às arestas dos rectângulos define curvas em X a que chamaremos α_{ij}, β_{ij}:



Tal como antes os caminhos α_{ij}, β_{ij} não são fechados. Resolvemos o problema da mesma maneira. Seja x_{ij} a imagem do vértice ij, isto é,

$$x_{ij} = \alpha_{ij}(1) = \beta_{ij}(0) = \alpha_{i\,j+1}(0) = \beta_{i+1\,j}(1)$$

com $x_{ij} \in V = U_{\mu_{ij}} \cap U_{\mu_{i\,j+1}} \cap U_{\mu_{i+1\,j}} \cap U_{\mu_{i+1\,j+1}}$. Como V é conexo por arcos, podemos arranjar um caminho δ_{ij} em V unindo x_{ij} a x_0, e escolhemos $\delta_{ij} = e_{x_0}$ sempre que $x_{ij} = x_0$. Por exemplo, $\delta_{i0} = e_{x_0}$. Então definimos os caminhos em $\Omega(X, x_0)$:

$$\tilde{\alpha}_{ij} = \bar{\delta}_{i\text{-}1\,j} * \alpha_{ij} * \delta_{ij} \in U_{\mu_{ij}} \cap U_{\mu_{i+1\,j}}$$

$$\tilde{\beta}_{ij} = \bar{\delta}_{ij} * \beta_{ij} * \delta_{i\,j\text{-}1} \in U_{\mu_{ij}} \cap U_{\mu_{i\,j+1}}$$

Podemos sempre dividir $I \times I$ de forma compatível com a partição de $I \times 0$ dada por $\gamma_1 * \ldots * \gamma_r$. Isto é, por forma a que

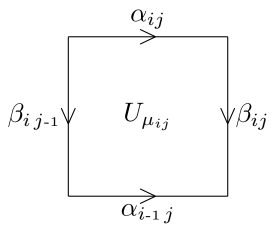
$$\underset{k<n}{\exists}\ \gamma_1 = \alpha_{01} * \alpha_{02} * \ldots * \alpha_{0k} \simeq \tilde{\alpha}_{01} * \tilde{\alpha}_{02} * \ldots * \tilde{\alpha}_{0k}$$

com fórmulas semelhantes para os outros γ_i. Então, em $\pi_1(U_{\nu_1}, x_0)$ temos $[\gamma_1]_{\nu_1} = [\tilde{\alpha}_{01}]_{\nu_1} * \ldots * [\tilde{\alpha}_{0k}]_{\nu_1}$, pelo que em $\underset{\nu}{\bigstar}\ \pi_1(U_\nu, x_0)$ temos $[\gamma_1]_{\nu_1} = [\tilde{\alpha}_{01}]_{\nu_1} \bullet \ldots \bullet [\tilde{\alpha}_{0k}]_{\nu_1}$.

Agora, $\tilde{\alpha}_{0i}$ está em $U_{\mu_{1i}}$ pelo que $[\tilde{\alpha}_{0i}]_{\nu_1} \sim [\tilde{\alpha}_{01}]_{\mu_{1i}}$. Fazendo o produto dos γ_i, obtemos

$$[\gamma_1]_{\nu_1} \bullet [\gamma_2]_{\nu_2} \bullet \ldots \bullet [\gamma_m]_{\nu_m} \sim [\tilde{\alpha}_{01}]_{\mu_{11}} \bullet \ldots \bullet [\tilde{\alpha}_{0n}]_{\mu_{1n}}$$

Olhemos agora para um dos rectângulos dentro de $I \times I$:



Este rectângulo induz uma homotopia $\alpha_{ij} * \beta_{ij} \simeq \beta_{i\,j\text{-}1} * \alpha_{i\text{-}1\,j}$ em $U_{\mu_{ij}}$. Então $\tilde{\alpha}_{ij} * \tilde{\beta}_{ij} \simeq \tilde{\beta}_{i\,j\text{-}1} * \tilde{\alpha}_{i\text{-}1\,j}$ pelo que, em $\pi_1(U_{\mu_{ij}}, x_0)$,

$$[\tilde{\alpha}_{ij}]_{\mu_{ij}} * [\tilde{\beta}_{ij}]_{\mu_{ij}} = [\tilde{\beta}_{i\,j\text{-}1}]_{\mu_{ij}} * [\tilde{\alpha}_{i\text{-}1\,j}]_{\mu_{ij}}$$

Logo, em $\underset{\nu}{\bigstar}\ \pi_1(U_\nu, x_0)$,

(1) $$[\tilde{\alpha}_{ij}]_{\mu_{ij}} \bullet [\tilde{\beta}_{ij}]_{\mu_{ij}} = [\tilde{\beta}_{i\,j\text{-}1}]_{\mu_{ij}} \bullet [\tilde{\alpha}_{i\text{-}1\,j}]_{\mu_{ij}}$$

A relação $\sim$ significa que não precisamos de nos preocupar com em que aberto U_ν estão os caminhos $\tilde{\alpha}_{ij}, \tilde{\beta}_{ij}$, pelo que omitiremos o subscrito $[\cdot]_\nu$ daqui para a frente. Usando a equação (1), e notando que $\tilde{\beta}_{i0} = \tilde{\beta} in = e_{x_0}$ obtemos

$$\begin{aligned}
&[\tilde{\alpha}_{i\text{-}1\,1}] \bullet [\tilde{\alpha}_{i\text{-}1\,2}] \bullet \ldots \bullet [\tilde{\alpha}_{i\text{-}1\,n}] = \\
&= ([\tilde{\beta}_{i0}]^{\text{-}1} \bullet [\tilde{\alpha}_{i1}] \bullet [\tilde{\beta}_{i1}]) \bullet ([\tilde{\beta}_{i1}]^{\text{-}1} \bullet [\tilde{\alpha}_{i2}] \bullet [\tilde{\beta}_{i2}]) \bullet \ldots \bullet ([\tilde{\beta}_{i\,n\text{-}1}]^{\text{-}1} \bullet [\tilde{\alpha}_{in}] \bullet [\tilde{\beta}_{in}]) \\
&\qquad = [\tilde{\alpha}_{i1}] \bullet [\tilde{\alpha}_{i2}] \bullet \ldots \bullet [\tilde{\alpha}_{in}]
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$[\gamma_1] \bullet [\gamma_2] \bullet \ldots \bullet [\gamma_m] = [\tilde{\alpha}_{01}] \bullet \ldots \bullet [\tilde{\alpha}_{0n}] = [\tilde{\alpha}_{m1}] \bullet \ldots \bullet [\tilde{\alpha}_{mn}] = [e_{x_0}] \qquad \square$$