TGIAF FICHA #10 (AULA PRÁTICA)

Exercício. *Mostre que não há nenhuma sucessão the funções contínuas positivas* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f_n(x)$ *é limitada para* x *irracional e ilimitada para* x *racional. Sugestão: pode assumir sem demonstrar que os irracionais são um espaço de Baire.*

Exercício. *Seja* $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que para qualquer função integrável* $f \in L^1([0,1])$, $\phi(x)f(x)$ *é integrável. Mostre que a função* $\Phi : L^1 \to L^1$ *dada por* $\Phi f(x) = \phi(x)f(x)$ *é contínua. Sugestão: teorema do gráfico fechado. Pode usar sem demonstrar que*

$$\int_0^1 |f_n(x)|\, dx \to 0 \Longrightarrow f_n(x) \to 0 \text{ em quase toda a parte}$$

Exercício. *Existe algum operador contínuo* $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ *cuja imagem sejam os polinómios? Sugestão: considere os subespaços* $T^{-1}(p_n)$ *em que* p_n *é o subespaço dos polinómios de grau* $\leq n$.