TGIAF TPC #10 (PARA ENTREGAR)

Exercício. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que para qualquer $a \in [\frac{1}{2}, 1]$ $\lim_{n\to+\infty} f(na) = 0$. Mostre que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Sugestão:*

$$A_{N,\varepsilon} = \left\{ a \in [\tfrac{1}{2}, 1] \; : \; \forall_{n\geq N} \; f(an) \leq \varepsilon \right\}$$

Exercício. *Seja c_0 o espaço das sucessões $\{x_n\}$ que convergem para 0 com a norma $\|x\| = \sup_n |x_n|$. Pode assumir sem demonstração que c_0 é completo.*

Seja $\{a_n\}$ uma sucessão tal que para qualquer $\{x_n\} \in c_0$ a série $\sum a_n x_n$ converge. Mostre que $A : c_0 \to \mathbb{R}$ dado por $A(\{x_n\}) = \sum a_n x_n$ é contínuo. Sugestão: aplique o teorema de Banach-Steinhaus às somas parciais.

Exercício. *Seja $(\, C([0,1])\,, \|\cdot\|_\infty\,)$ o espaço normado das funções contínuas, $\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$ a norma uniforme. Seja $V \subset C([0,1])$ um subespaço fechado tal que todas as funções $f \in V$ têm derivada f' contínua.*

(1) *Mostre que V, com a norma $\|f\|_{1,\infty} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, é um espaço de Banach. Sugestão: a certa altura pode ser conveniente usar*

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x)\, dx$$

(2) *Seja agora V com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Mostre que um subconjunto $A \subset V$ limitado e fechado é compacto. Sugestão: $Id : (V, \|\cdot\|_{1,\infty}) \to (V, \|\cdot\|_\infty)$.*

(3) *Mostre que V tem dimensão finita.*

Exercício. *Seja $p_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma sucessão de polinómios de grau ≤ 100 tal que $p_n \to f$ uniformemente. Verdadeiro ou falso: f é um polinómio.*