**1.** Seja $X$ um conjunto, $\tau$ a colecção dos subconjuntos $U \subset X$ tais que $U^c$ é contável ou igual a $X$. Mostre que $(X, \tau)$ é um espaço topológico.

**2.** Seja $\mathcal{B}$ uma base para a topologia $\tau$. Mostre que $\tau$ é a intersecção de todas as topologias em $X$ que contém $\mathcal{B}$.

**3.** Mostre que

$$\mathcal{B} = \{]a, b[ : \ a < b \, , \ a, b \in \mathbb{Q}\}$$

é uma base para a topologia usual em $\mathbb{R}$.

**4.** Seja $(X, \tau_X)$ um espaço topológico, $(Y, \tau_Y)$ um subespaço. Dado $Z \subset Y \subset X$ mostre que a topologia induzida por $X$ em $Z$ é igual à topologia induzida por $Y$ em $Z$.

**5.** Seja $Y = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ com a topologia induzida pela topologia usual em $\mathbb{R}$. Quais dos seguintes conjuntos são abertos em $Y$?

$$\{\tfrac{1}{2} < |x| < 1\} \qquad \{\tfrac{1}{2} < |x| \leq 1\}$$
$$\{\tfrac{1}{2} \leq |x| < 1\} \qquad \{\tfrac{1}{2} \leq x \leq 1\}$$

**6.** Uma função $f$ é aberta sse para qualquer aberto $A$, $f(A)$ for aberto. Mostre que as projecções

$$\pi_1 : X \times Y \to X \qquad \pi_2 : X \times Y \to Y$$

são abertas.

**7.** Sejam $X, Y$ espaços topológicos, $A \subset X$ e $B \subset Y$ conjuntos fechados. Mostre que $A \times B \subset X \times Y$ é fechado.

**8.** Sejam $A, F \subset X$, $A$ aberto e $F$ fechado. Mostre que $A - F$ é aberto e $F - A$ é fechado.

**9.** Sejam $X, Y$ espaços topológicos, $A \subset X$ e $B \subset Y$. Mostre que, em $X \times Y$,

$$\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$$

**10.** Sejam $A, B \subset X$. Verdadeiro ou falso:

$$\overline{A - B} = \bar{A} - \bar{B}$$

Em caso negativo determine se uma das inclusões $\subset$ ou $\supset$ se verifica.

**11.** Sejam $X, Y$ espaços topológicos, $x_0 \in X$. Mostre que a função $f : Y \to X \times Y$ definida por

$$f(y) = x_0 \times y$$

é um mergulho.

**12.** Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Mostre que $[a, b]$ é homeomorfo a $[0, 1]$.