1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Mostre que $[a, b]$ é homeomorfo a $[0, 1]$.

2. Seja (x_n) uma sucessão tal que x_n é constante igual a x para todo o $n \geq N$. Mostre que x é um limite de (x_n).

3. Seja X um conjunto, τ a topologia cocontável em X, isto é, $A \in \tau$ sse $A = \emptyset$ ou A^c é contável.

(1) Seja (x_n) uma sucessão em X convergindo para um ponto $x \in X$. Mostre que $x_n = x$ para n suficientemente grande.
(2) X é Hausdorff? Justifique a sua resposta.
(3) Tomemos agora $X = \mathbb{R}$. Qual o fecho de $]0, 1[$? E qual o fecho do conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$?
(4) $(\mathbb{R}, \tau)$ satisfaz o primeiro axioma de numerabilidade? Justifique.

4. Mostre que, para qualquer $\varepsilon > 0$, a colecção $\mathcal{B}_x = \{B_r(x) : 0 < r < \varepsilon\}$ é uma base de $\mathcal{V}_x$.

5. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos.

(1) Mostre que a função $\rho : X_1 \times X_2 \to [\,0, +\infty[$ definida por
$$\rho(\,(x_1, x_2)\,,\,(y_1, y_2)\,) = \max\{\,d_1(x_1, y_1)\,,\,d_2(x_2, y_2)\,\}$$
é uma distância em $X_1 \times X_2$.
(2) Mostre que a bola de raio r em $(X_1 \times X_2, \rho)$ centrada em $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ é igual a $B_r(x_1) \times B_r(x_2)$.
(3) Mostre que a topologia ionduzida em $X_1 \times X_2$ é a topologia produto.

6. Mostre que a distância d é uma função contínua de $X \times X$ em $\mathbb{R}$ se pusermos a topologia produto em $X \times X$ e a topologia usual em $\mathbb{R}$.

7. Seja X um espaço métrico, $C \subset X$. Mostre que $\operatorname{diam} C = \operatorname{diam} \bar{C}$.

8. Seja (x_n) uma sucessão. Mostre que
$$(x_n) \text{ converge} \Longrightarrow (x_n) \text{ é de Cauchy} \Longrightarrow (x_n) \text{ é limitada}$$

9. Exercício 9 página 271

10. Dizemos que um espaço topológico é T_1 se
$$\underset{x,y \in X}{\forall} \ \underset{U \in \mathcal{V}_x}{\exists} \ y \notin U$$

(1) Mostre que X é T_1 sse os conjuntos com um elemento são fechados.
(2) Ser T_1 é uma propriedade topológica? Justifique.