Exercício. *Dois espaços métricos* (X, d_X) *e* (Y, d_Y) *dizem-se uniformemente equivalentes sse existir um homeomorfismo* $f : X \to Y$ *tal que* f, f^{-1} *são uniformemente contínuas.*

(1) *Mostre que se* X *é uniformemente equivalente a* Y *e* Y *é totalmente limitado, então* X *é também totalmente limitado.*
(2) *Mostre que 'totalmente limitado' não é uma propriedade topológica.*

Exercício. *Seja* $\mathcal{C}$ *o espaço das funções contínuas* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *com a topologia uniforme. Seja*

$$F_n = \left\{ f \in \mathcal{C} \; : \; \underset{x_0 \in [0, 1-1/n]}{\exists} \; \underset{x \in [x_0, 1[}{\forall} \; |f(x) - f(x_0)| \leq n(x - x_0) \right\}$$

(1) *Mostre que* F_n *é um subconjunto fechado de* $\mathcal{C}$.
(2) *Mostre que* F_n *tem interior vazio. Sugestão: para qualquer função* $g \in \mathcal{C}$ *existe uma função poligonal* ϕ *tal que* $\rho(g, \phi) < \frac{\varepsilon}{2}$ *e existe uma função poligonal* ψ *com* $\rho(\phi, \psi) < \frac{\varepsilon}{2}$ *e cuja derivada á direita em módulo é sempre superior a* n.
(3) *Seja* $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ *o conjunto das funções tais que a derivada à direita existe em pelo menos um ponto. Mostre que* $\mathcal{D}$ *tem interior vazio.*

Portanto existem funções sem derivada à direita em nenhum ponto.

Exercício. *Mostre que não há nenhuma sucessão the funções contínuas positivas* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f_n(x)$ *é limitada para* x *irracional e ilimitada para* x *racional. Sugestão: pode assumir sem demonstrar que os irracionais são um espaço de Baire.*

Exercício. *Há alguma função* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *que seja contínua nos racionais e descontínua nos irracionais? Sugestão: pode assumir sem demonstrar que os irracionais são um espaço de Baire.*

Exercício. *Seja* $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *um campo vectorial contínuo limitado, isto é,* $\|V(x)\| \leq C$. *Para cada* n *definimos* $\gamma_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ *através de:*

- $\gamma_n(0) = (0,0)$
- *Estando* γ_n *definida em* $\left[\, 0 \,,\, \frac{k}{n} \,\right]$, *definimos* γ_n *em* $\left[\, \frac{k}{n} \,,\, \frac{k+1}{n} \,\right]$, *por*

$$\gamma_n(t) = \gamma_n\left(\tfrac{k}{n}\right) + \left(t - \tfrac{k}{n}\right) V\left(\gamma_n\left(\tfrac{k}{n}\right)\right)$$

Mostre que

(1) *Seja* $V_t = V(\gamma_n(t))$. *Dados* $t_1 \leq \frac{i}{n} < \frac{j}{n} \leq t_2$,

$$\gamma_n(t_2) - \gamma_n(t_1) = \frac{(i - nt_1)V_{\frac{i-1}{n}} + V_{\frac{i}{n}} + \ldots + V_{\frac{j-1}{n}} + (nt_2 - j)V_{\frac{j}{n}}}{n}$$

(2) *A sucessão* $\{\gamma_n\}$ *tem uma subsucessão que converge uniformemente em compactos para uma função contínua* $\gamma : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$.
(3) γ *é diferenciável e* $\gamma'(t) = V(\gamma(t))$. *Sugestão: Se* $t \leq \frac{i}{n} < \frac{j}{n} \leq t + h$, *então*

$$\gamma_n(t+h) - \gamma_n(t) - hV = \frac{(i - nt)(V_{\frac{i-1}{n}} - V) + (V_{\frac{i}{n}} - V) + \ldots + (V_{\frac{j-1}{n}} - V) + (nt + nh - j)(V_{\frac{j}{n}} - V)}{n}$$

Exercício. *Neste exercício todos os espaços são localmente compactos de Hausdorff.* X^Y *representa o espaço das funções contínuas de* Y *para* X *com a topologia compacta aberta e* $X+Y$ *representa a reunião disjunta de* X *e* Y *com a topologia gerada pela base* $\tau_X \cup \tau_Y$*. Mostre que os seguintes espaços são homeomorfos:*

(1) $\left(Y^X\right)^Z$ *e* $Y^{X\times Z}$
(2) $Z^X \times Z^Y$ *e* Z^{X+Y}
(3) $Y^X \times Z^X$ *e* $(Y\times Z)^X$