Resolução do primeiro teste

Problema 1.

Seja $\mathcal{B}$ a colecção de subconjuntos de $\mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{B} = \{[\,a, b[\,:\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

(a) Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base duma topologia $\tau_{\mathcal{B}}$ sobre $\mathbb{R}$.

Basta verificar 2 propriedades:

- $x \in [x, x+1[$
- $[a, b[\cap[c, d[= [\max\{a, c\}, \min\{b, d\}[\in \mathcal{B}$

(b) Mostre que $(\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{B}})$ é separável. Pode usar resultados conhecidos sobre números reais.

Mostremos que $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Basta verificar para elementos da base. Qualquer intervalo $[a, b[$ não vazio contém um racional logo $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ é numerável.

(c) Mostre que $(\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{B}})$ satisfaz o primeiro axioma de numerabilidade.

Seja $\mathcal{B}_x = \left\{\left[x, x + \frac{1}{n}\right[: n \in \mathbb{N}\right\}$. Dado $U \in \mathcal{V}_x$ existe um $[a, b[\in \mathcal{B}$ tal que $x \in [a, b[\subset U$. Então $a \leq x < b$. Tomemos n tal que $x < \frac{1}{n} < b$. Então $x \in \left[x, x + \frac{1}{n}\right[\subset [a, b[\subset U$.

Nota: $(\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{B}})$ não satisfaz o segundo axioma de numerabilidade.

(d) Seja X o espaço $(\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{B}}) \times (\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{B}})$ com a topologia produto. Seja $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ y = x\}$ com a topologia induzida por X. Mostre que Y é homeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{B}})$.

Seja $\pi : X \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{B}})$ a projecção na primeira componente. Então π é contínua logo $\pi|_Y$ é contínua. A inversa de $\pi|_Y$ é $f(x) = (x, x)$. Seja $U = [a, b[\times[c, d[$ um aberto de X (basta tomar elementos da base). Então $f^{-1}(U) = [a, b[\cap[c, d[\in \mathcal{B}$ é aberto logo f é contínua. Portanto f é um homeomorfismo.

Problema 2.

Resolva **dois** dos seguintes 3 problemas:

(a) Seja (X, τ) um espaço topológico, $C \subset X$. Mostre que $\bar{C} - C$ tem interior vazio.

Seja $x \in \operatorname{int}(\bar{C} - C)$. Então existe um $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $U \subset (\bar{C} - C) \subset C^c$. Mas como $x \in \bar{C}$, $U \cap C \neq \emptyset$ o que é uma contradição.

(b) Mostre que a função $f :]0, 2\pi\,] \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (\,\cos t, \operatorname{sen} t\,)$ não é um mergulho. Sugestão: use sucessões.

Seja $g : f(]0, 2\pi]) \to]0, 2\pi]$ a inversa de f. Seja $y_n = f(\frac{1}{n})$. Então $y_n \to (1, 0) = f(2\pi)$ mas $g(y_n) = \frac{1}{n}$ não converge. Portanto g não é contínua.

(c) Sejam X, Y espaços topológicos, $A \subset X$. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua para todo o $x \in A$. Mostre que $f|_A$ é contínua.

Seja $x \in A$. Queremos mostrar que para todo o $V \in \mathcal{V}_{f(x)}$ existe um $U \in \mathcal{V}_x$ na topologia de A tal que $U \subset f^{-1}(V)$. Mas como f é contínua em x, existe um $W \in \mathcal{V}_x$ na topologia de X tal que $W \subset f^{-1}(V)$. Basta pois tomar $U = W \cap A$.

Nota: o recíproco é verdadeiro se A for aberto.

Problema 3.

Seja (X, d) um espaço métrico, $\mathcal{B}(X)$ o conjunto das funções $f : X \to \mathbb{R}$ limitadas.

(a) Dados $f, g \in \mathcal{B}(X)$ seja

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Mostre que ρ é uma distância em $\mathcal{B}(X)$.

Como $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ e f, g são limitadas, $\rho(f, g)$ nunca é $+\infty$. Temos que verificar 3 propriedades:

(1) $\rho(f, g) = 0 \Rightarrow \forall_x f(x) = g(x) \Rightarrow f = g$
(2) $\rho(f, g) = \rho(g, f)$ porque $|f - g| = |g - f|$
(3) Para qualquer x,

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$$

Tirando o supremo em x obtemos $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$.

(b) Fixemos um ponto $x_0 \in X$. Para cada $x \in X$ definimos uma função $f_x : X \to \mathbb{R}$ por

$$f_x(y) = d(x, y) - d(x_0, y)$$

Mostre que $f_x \in \mathcal{B}(X)$ (isto é, f_x é limitada).

Pela desigualdade triangular

$$d(x, y) - d(x_0, y) \leq d(x, x_0) \qquad d(x_0, y) - d(x, y) \leq d(x, x_0)$$

Logo $|f_x(y)| \leq d(x, x_0)$.

(c) Seja $\phi : X \to \mathcal{B}(X)$ a função definida por $\phi(x) = f_x$. Mostre que ϕ é uma isometria.

Sejam $x, z \in X$. Então

$$\rho(\phi(x), \phi(z)) = \sup_{y \in X} |f_x(y) - f_z(y)| = \sup_{y \in X} |d(x, y) - d(z, y)|$$

Como $|d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z)$ obtemos $\rho(\phi(x), \phi(z)) \leq d(x, z)$. Pondo $y = z$ obtemos $\rho(\phi(x), \phi(z)) \geq |d(x, z) - d(z, z)| = d(x, z)$.

(d) Mostre que $\mathcal{B}(X)$ é completo.

Seja (f_n) uma sucessão de Cauchy em $\mathcal{B}(X)$. Então, como $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \rho(f_n, f_m)$, $(f_n(x))$ é uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é completo, a sucessão converge. Definimos $f(x) = \lim f_n(x)$. Como (f_n) é Cauchy, para qualquer ε existe um N tal que

$$m, n > N \Longrightarrow \rho(f_n, f_m) = \sup_x |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

ou seja,

$$m, n > N \Longrightarrow \forall_x \, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Tomando o limite quando $m \to \infty$ obtemos

$$n > N \Longrightarrow \forall_x \, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Como $|f(x)| \leq |f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$, isto mostra que $f \in \mathcal{B}(X)$ e que para $n > N$ $\rho(f_n, f) \leq \varepsilon$. Portanto $f_n \to f$.

Nota: $\overline{\phi(X)}$ é o completado de X.

Problema 4.

Seja τ a topologia usual em $\mathbb{R}$ e seja

$$\tilde{\tau} = \{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$$

(pode assumir que isto é uma topologia). Seja X um espaço topológico. Mostre que uma função $f : X \to (\mathbb{R}, \tilde{\tau})$ estritamente positiva é contínua sse o conjunto

$$\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 < y < f(x)\}$$

for aberto na topologia produto $X \times (\mathbb{R}, \tau)$.

Seja

$$R = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 < y < f(x)\}$$

- $\Rightarrow$ Mostremos que $R \subset \operatorname{int} R$. Seja $(x, y) \in R$. Então $y < f(x)$. Tomamos $a \in]y, f(x)[$. Então $]a, +\infty[\in \mathcal{V}_{f(x)}$ logo existe um $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $f(U) \subset]a, +\infty[$. Mostremos que $(x, y) \in U \times]0, a[\subset R$ e que portanto $(x, y) \in \operatorname{int} R$. Seja $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in U \times]0, a[$. Então $f(\tilde{x}) \in f(U) \subset]a, +\infty[$ logo $\tilde{y} < a < f(\tilde{x})$ logo $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in R$.
- $\Leftarrow$ Mostremos que f é contínua em x. A colecção $\mathcal{B}_x = \{]a, +\infty[: 0 < a < f(x)\}$ é uma base de $\mathcal{V}_x$ porque $f(x) > 0$. Seja $]a, +\infty[\in \mathcal{B}_x$. Então $(x, a) \in R$. Como R é aberto, existem $U \in \mathcal{V}_x, \varepsilon > 0$ tal que $(x, a) \in U \times]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset R$. Mostremos que $f(U) \subset]a, +\infty[$. Seja $\tilde{x} \in U$. Então $(\tilde{x}, a) \in U \times]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset R$. Logo $a < f(\tilde{x})$ ou seja $f(\tilde{x}) \in]a, +\infty[$.

Nota: uma função contínua $f : X \to (\mathbb{R}, \tilde{\tau})$ é chamada semi-contínua inferior.