Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2012/2013

Testes de Recuperação/Exame

Versão A

28 de Janeiro de 2013

Cursos: LEGM, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEBiol, MEC, MEEC, MEQ

1º Teste / Exame (1ª parte) — Versão A

1. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$u(x,y) = ax^2 + by^2 + aby$$

em que a e b são constantes reais.

[1,0 val.] (a) Determine quais os valores de a e b para os quais a função u é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

[1,0 val.] (b) Para $a = -b = 2$, determine a função inteira $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que verifica $\operatorname{Re} f = u$ e $f(\mathrm{i}) = -6$.

[1,0 val.] (c) Calcule

$$\oint_{|z|=2013} \frac{z f(z)}{(z-\mathrm{i})^2}\, dz,$$

onde a curva é percorrida uma vez em sentido inverso.

2. Considere $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z}$.

[1,0 val.] (a) Determine o desenvolvimento em série de Taylor de f em torno de $z_0 = -\mathrm{i}$ e indique qual a maior região onde o desenvolvimento é válido.

[0,5 val.] (b) Determine o valor de

$$f^{(n+1)}(-\mathrm{i}) + n(n+1) f^{(n-1)}(-\mathrm{i}),$$

para cada $n \geq 2$.

3. Considere a função complexa de variável complexa f definida no seu domínio por

$$f(z) = \frac{3}{(z-5)^3} + \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z^2-1)^2} + (z+1)\operatorname{sen}\frac{2}{z+1}.$$

[2,0 val.] (a) Determine e classifique todas as singularidades de f, calculando os respectivos resíduos.

[0,5 val.] (b) Calcule o valor de $\oint_\gamma f(z)\, dz$, onde γ é o caminho

$$\theta \longmapsto 2\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}(2\theta), \qquad \text{com} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

[2,0 val.] 4. Use o teorema dos resíduos para calcular o integral real

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx.$$

[1,0 val.] 5. Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{z+\mathrm{i}}.$$

Determine se a função é primitivável em $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}y : -1 \leq y \leq 1\}$ e, em caso afirmativo, calcule uma primitiva de f nessa região.

2^{o} Teste / Exame (2^{a} parte) — Versão A

6. Considere o seguinte problema de valor inicial (PVI)

$$e^{5x} - y^5 + y^4 \frac{dy}{dx} = 0, \qquad y(0) = 1\,.$$

[1,0 val.] (a) Mostre que a equação diferencial possui um factor integrante da forma $\mu = \mu(x)$ e determine-o.

[1,5 val.] (b) Determine explicitamente a solução do PVI dado e indique o seu intervalo máximo de definição.

7. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

[1,5 val.] (a) Determine e^{At}

[0,5 val.] (b) Determine uma solução particular do problema

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

[2,0 val.] 8. (a) Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + y = 4e^t - t; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

[0,5 val.] (b) Determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais todas as soluções da equação diferencial $y'' + ay' + y = 0$ satisfazem $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

[1,0 val.] 9. Determine a série de Fourier da função $f\colon [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -2 \leq x < -1 \\ 0 & \text{se} \quad -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

indicando a soma da série para cada $x \in \mathbb{R}$.

[1,0 val.] 10. Determine todas as soluções da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + e^t u = 0,$$

com condições de fronteira $u(0,t) = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$ (onde $L > 0$).

[1,0 val.] 11. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + t^3 y = e^t\,; \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0\,.$$

Justifique que a sua solução é única e que admite derivadas de todas as ordens. Calcule a derivada de ordem 4 da solução $y(t)$ em $t = 0$.