Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2010/2011

2º Teste - Versão A

(Cursos: LEIC-A, MEEC, MEMec, MEAer, LEAN)

18 de Dezembro de 2010

Duração: 1h 30m

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Este caderno de exame inclui duas folhas em branco no final, que poderá utilizar como rascunho ou para terminar outras respostas. Todo o caderno é para ser entregue no final da prova, pelo que não poderá rasgar ou arrancar essas folhas.

Pergunta	cotação	classificação
1) a)	0,5	
1) b)	1,0	
1) c)	0,5	
2)	2,0	
3) a)	0,5	
3) b)	1,0	
3) c)	1,0	
4) a)	1,0	
4) b)	1,5	
5)	1,0	
Total	10	

Nome: ____

Nº: _________________________ **Sala:** ____________

Curso: _______________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

1. Considere a equação diferencial

$$\left(\frac{e^{2x}\,\mathrm{sen}(x)}{2y} - y\right) + (e^{2x}+1)\frac{dy}{dx} = 0.$$

[0,5 val.] (a) Mostre que a equação não é exacta mas que admite o factor integrante $\mu(x,y) = 2ye^{-2x}$.

[1,0 val.] (b) Determine **na forma explícita** a solução da equação que verifica a condição inicial $y(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

[0,5 val.] (c) Justifique que a solução do problema de valor inicial da alínea anterior é única, e determine o seu intervalo máximo de definição.

[2,0 val.] 2. Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$$

com $x(-1) = 1$ e $y(-1) = 1$.

3. Considere a equação diferencial

$$y'' - 2y' + 2y = h(t).$$

[0,5 val.] (a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

[1,0 val.] (b) Sendo $h(t) = 4t + 6e^{2t}$ determine a solução da equação que verifica $y(0) = y'(0) = 0$.

[1,0 val.] (c) Determine a solução geral da equação para $h(t) = \frac{e^t}{\cos t}$.

4. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{se } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

[1,0 val.] (a) Determine a série de senos de $f(x)$, indicando os valores para os quais a série obtida converge, para cada $x \in \mathbb{R}$.

[1,5 val.] (b) Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 < x < 2,\ t > 0) \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x). \end{cases}$$

[1,0 val.] 5. Seja f uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$, periódica, de período $2L$. Mostre que os coeficientes a_n e b_n do desenvolvimento de f em série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

satisfazem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.