Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2012/2013

2ºTeste — Versão B

(CURSOS: LEGM, LEMAT, MEAER, MEAMBI, MEBIOL, MEC, MEEC, MEQ)

22 de Dezembro de 2012, 14h30

Duração: 1h 30m

[1,5 val.] 1. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$t + \frac{1}{1+4y^2}\frac{dy}{dt} = 0; \qquad y(1) = 0.$$

Determine explicitamente a solução $y(t)$ e indique justificadamente se a solução anterior explode.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

[1,5 val.] (a) Determine e^{At}.

[1,0 val.] (b) Determine a solução geral da equação

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[0,5 val.] (c) Indique, justificando, os valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tais que a solução do problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}; \qquad \mathbf{x}(0) = (a, b)$$

é limitada em $[0, +\infty[$.

[2,0 val.] 3. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$y'' - y = b(t) \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0$$

escolhendo para $b(t)$ **uma e só uma** das seguintes funções.

$$(\mathbf{i})\ b(t) = t^2 - 2e^{-t},\ \ t \in \mathbb{R} \qquad \mathbf{ou} \qquad (\mathbf{ii})\ b(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 0 & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

4. Considere o problema de valor inicial e fronteira para $u\colon [0, \pi] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = (1 + \operatorname{sen} t)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \qquad \text{com} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -3 & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases} \tag{1}$$

[1,0 val.] (a) Determine a série de cosenos de $f(x)$ indicando a soma da série para cada $x \in \mathbb{R}$.

[1,0 val.] (b) Resolva o problema de valor inicial e fronteira (**??**).

[1,5 val.] 5. Mostre que todas as soluções da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \operatorname{sen}(ty) + t^3$$

são funções pares (quando prolongadas ao seu intervalo máximo de definição).