Análise Matemática IV - A

2^{o} Semestre 2006/2007

Cursos: LMAC, LEFT, LEBM, LEA

Ficha de Problemas nº 10

1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Determine e^{At} e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(1) = (0, -1, 0)$.

2. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \pi & -\pi \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 0)$.

3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = (2, -1, 2)$.

4. Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 \\ \dot{y} = x + y - 2 \end{cases}$$

Sugestão: determine uma solução particular constante.

5. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule e^{At}.

(b) Determine a solução do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \\ \mathbf{y}(0) = (0, 1, 1) \end{cases}$$

onde $\mathbf{b}(t) = (0, e^{t\sqrt{2}}, e^{-t})$

6. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \\ \\ \mathbf{y}(0) = (0,0,0,0) \end{cases}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

(b) Resolva o problema.

7. Resolva o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 \\ \dot{y} = 2x - y \\ \dot{z} = y - e^{-t} z \end{cases}$$

sujeito às condições iniciais $x(0) = y(0) - 1 = z(0)$.

Sugestão: note que as primeiras duas equações não mencionam z.

8. Sejam A uma matriz $n \times n$ (de componentes reais ou complexas), e

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

com $\lambda \in \mathbb{C}$.

Mostre que existe

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{C}^n$$

tal que $A = SJS^{-1}$ sse

$$\begin{array}{lcl} (A - \lambda I)\, v_1 & = & 0 \\ (A - \lambda I)\, v_{i+1} & = & v_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{array}$$

9. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ de componentes reais ou complexas. Mostre que se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$. Aproveite o resultado para calcular:

$$\exp\left(t \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Sugestão: mostre que $X(t) = e^{-At} e^{(A+B)t}$ satisfaz $\dot{X} = BX$, $X(0) = I$.